Kombinatorische Behandlung von Kohärenz-Fragen in monoidalen Kategorien

Mohammed Seoud

1979

Kombinatorische Behandlung von Kohärenz-Fragen in monoidalen Kategorien

D I S S E R T A T I O N

Zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
der Fakultät für Mathematik
der Ludwig-Maximilians-Universität
München

vorgelegt von Mohammed Seoud
aus Kairo-Ägypten

eingereicht im 23-5-1979

Gedruckt mit Unterstützung des Deutschen Akademischen Austauschdienstes

1. Referent: Prof. Dr. B. Pareigis

Korreferent: Prof. Dr. F. Kasch

Tag der mündlichen Prüfung: 31.7.1979

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

DISSERTATIONS– UND FOTODRUCK FRANK
8 München 2, Gabelsbergerstraße 15, Tel. 2 8 0 9 0 9 0

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
§0 Algebren und Peano-Algebren.	7
§1 Kohärenz in monoidalen Kategorien und $\mathfrak{C}$-Kategorien.	20
§2 Kohärenz der monoidalen Funktoren.	48
§3 Kohärenz der $\mathfrak{C}$-Funktoren.	76
§4 Kohärenz der monoidalen Transformationen.	89
§5 Kohärenz der $\mathfrak{C}$-Transformationen.	102
§6 Verallgemeinerung.	113
§7 Kohärenz in symmetrischen monoidalen Kategorien.	145
Literaturverzeichnis	175

Einleitung

Das Assoziativgesetz bei Gruppen lautet:

$$\forall\, a,b,c \in G:\quad a.(b.c) = (a.b).c$$

Gewöhnlich benötigt man jedoch das verallgemeinerte Assoziativ-Gesetz für G, wonoch Produkte beliebig geklammert werden können. Ein Beweis dieser Aussage ist deshalb schwierig oder zumindest unbequem, weil die präzise Formelierung der Aussage schwierig und unförmig ist.

Auf ein ähnliches Problem trifft man beim Studium von monoidalen Kategorien. Eine monoidale Kategorie ist eine Kategorie $\mathbb{C}$ mit Tensorprodukt $\otimes:\mathbb{C}\times\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ und einem ausgezeichneten Element $I \in \mathbb{C}$ mit drei natürlichen Isomorphismen :

$\alpha: A\otimes(B\otimes C)\cong(A\otimes B)\otimes C$,

$\lambda: I\otimes A\cong A$,

$\rho: A\otimes I\cong A$,

wobei $A,B,C \in Ob(\mathbb{C})$, so dass bestimmte Diagramme kommutieren. Durch α ist eine Situation definiert die ähnlich ist zu der oben beschriebenen Situation bei Gruppen. Es stellt sich hier die Frage ob für beliebig vorgegebene Objekte $A_1,\ldots,A_n \in \mathbb{C}$, das Tensorprodukt beliebig geklammert werden kann, und die dabei entstehenden Objekte isomorph sind. Das ist tatsächlich der Fall und ein Beweis dafür würde etwa den selben Ideen folgen wie ein Beweis für das allgemeine Assoziativ-Gesetz bei Gruppen. Im Gegensatz zur Situation bei Gruppen tritt bei monoidalen Kategorien jedoch ein zusätzliches Problem auf, das viel tiefer liegt, nämlich die Frage, ob der nach obiger Überlegung existierende Isomorphismus eindeutig ist. Dieses ist das einfachste Beispiel für ein Kohärenzproblem.

1963 hat Mac Lane in seiner Arbeit: "Natural Associativity and

Commutativity" (Rice University Studies) die Frage beantwortet, und die Eindeutigkeit der Isomorphie bewiesen.

Zur Konstruktion eines Isomorphismus zwischen zwei Objekten P und Q, die sich als zwei verschiedene geklammerte Tensorprodukte von $A_1, \ldots, A_n$ darstellen lassen, lässt Mac Lane keine beliebige Isomorphismen zu, sondern nur solche die sich alle als Tensorprodukt von α mit gewissen Identitäten schreiben lassen. Es gibt offensichtlich sehr viele verschiedene solche Möglickeiten, so wie sich ein Produkt in einer Gruppe auf verschiedenen Wegen nach und nach in ein anders geklammertes Produkt umklammern lässt. Mac Lane zeigt nun, dass alle Isomorphismen gleich sind. Da diese Aussage für beliebig grosse Tensorprodukte gilt, ist damit die Kommutativität von unendlich vielen Diagrammen bewiesen worden. Selbstverständlich braucht man für diesen Beweis zusätzliche Voraussetzungen über α. Erstaunlich ist, dass man mit der Kommutativität nur eines einzigen Diagramms auskommt, nämlich:

$$\begin{array}{ccccc} A\otimes(B\otimes(C\otimes D)) & \xrightarrow{\alpha} & (A\otimes B)\otimes(C\otimes D) & \xrightarrow{\alpha} & ((A\otimes B)\otimes C)\otimes D \\ \downarrow{\scriptstyle 1\otimes\alpha} & & & & \uparrow{\scriptstyle \alpha\otimes 1} \\ A\otimes((B\otimes C)\otimes D) & & \xrightarrow{\alpha} & & (A\otimes(B\otimes C))\otimes D \end{array}$$

Wenn wir noch die anderen zwei natürlichen Isomorphismen λ und ρ betrachten, dann meint man mit Kohärenz in einer ungenauen Beschreibung, dass alle Diagramme, in denen nur iterierte tensorierte Formen von α, λ, ρ auftreten, kommutieren. Auch diese Aussage wurde von Mac Lane in seinem Buch [9] schon bewiesen. Die Formulierung bei Mac Lane, wie sie in seinem Buch [9] steht, ist nicht exakt genug. Die Diagramme müssen immer auf dem Niveau der "Worte" betrachtet werden. Pareigis hat in einem Brief an Mac Lane ein Gegenbeispiel zu seiner Formulierung gegeben. Kurz gefasst ist es das folgende:

Es gibt eine monoidale Kategorie $(\mathbb{C},\otimes,I,\alpha,\lambda,\rho)$ so dass:

$F:=Id_{\mathbb{C}}\otimes(Id_{\mathbb{C}}\otimes(Id_{\mathbb{C}}\otimes Id_{\mathbb{C}})) = (Id_{\mathbb{C}}\otimes(Id_{\mathbb{C}}\otimes Id_{\mathbb{C}}))\otimes Id_{\mathbb{C}}$ und

$G:=Id_{\mathbb{C}}\otimes((Id_{\mathbb{C}}\otimes Id_{\mathbb{C}})\otimes Id_{\mathbb{C}}) = ((Id_{\mathbb{C}}\otimes Id_{\mathbb{C}})\otimes Id_{\mathbb{C}})\otimes Id_{\mathbb{C}}$,wobei

$Id_{\mathbb{C}}:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ der Identitätsfunktor ist,aber die natürlichen Transformationen $Id_{\mathbb{C}}\otimes\alpha:F\longrightarrow G$ und $\alpha\otimes Id_{\mathbb{C}}:F\longrightarrow G$ sind verschieden.Pareigis hat in seinem Brief eine andere Formulierung vorgeschlagen "any two paths between two words define the same natural transformation,where paths like words,are just formally defined,without reference to a particular monoidal category". Wir erwähnen das Gegenbeispiel von Pareigis mit Details und die Formulierung von Mac Lane im Kapitel 6.

Folgende Analogie werden wir im folgenden weiter verfolgen:

Eine monoidale Kategorie $(\mathbb{C},\otimes:\mathbb{C}\times\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C},I\varepsilon\mathbb{C})$ entspricht einen Monoid $(G,o:G\times G\longrightarrow G,1\varepsilon G)$,

$\alpha:A\otimes(B\otimes C)\cong(A\otimes B)\otimes C$,

$\lambda:I\otimes A\cong A$,

$\rho:A\otimes I\cong A$

entspricht dabei die Gesetzen:

$a.(b.c) = (a.b).c$,

$1.a = a$,

$a.1 = a$.

Wir betrachten jetzt den Fall einer G-Menge M,wobei G ein Monoid ist,und auf der Menge M eine Struktur gegeben ist durch:

$o:G\times M\longrightarrow M$,mit:

$ao(bom) = (a.b)om$,

$1om = m$.

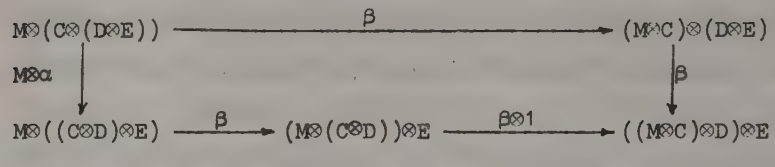
Wieder gibt es ein allgemeines Assoziativ-Gesetz für Produkte in M.Die kategorische Verallgemeinerung hiervon ist der Begriff der $\mathbb{C}$-Kategorie $\mathbb{M}$.

Sei $\mathbb{C}$ eine monoidale Kategorie. Eine $\mathbb{C}$-Kategorie $\mathfrak{M}$ ist eine Kategorie $\mathfrak{M}$, mit einem Funktor $\otimes:\mathfrak{M}\times\mathbb{C}\longrightarrow\mathfrak{M}$, und natürlichen Isomorphismen:

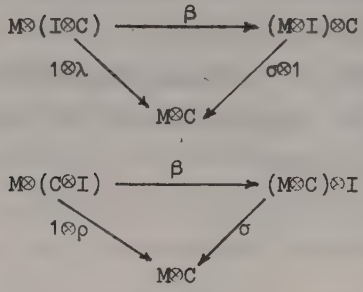
$\beta:M\otimes(C\otimes D)\cong(M\otimes C)\otimes D$,

$\sigma:M\otimes I\cong M$,

so dass die folgenden Diagramme:



,



,

kommutieren.

Auch hier tritt wieder ein Kohärenzproblem auf, das in der Literatur noch nicht behandelt worden ist. Dieses werden wir zusammen mit einem genaueren Beweis für die Kohärenz in $\mathbb{C}$ im ersten Kapitel beweisen.

Im zweiten Kapitel betrachten wir die monoidalen Funktoren. Ein monoidaler Funktor (entspricht einem Monoidhomomorphismus) ist ein Funktor $\mathfrak{F}:\mathbb{C}\longrightarrow\mathcal{D}$, wobei $(\mathbb{C},\otimes,I),(\mathcal{D},\otimes,J)$ monoidale Kategorien sind, begleitet von zwei natürlichen Isomorphismen

$\delta:\mathfrak{F}(C\otimes D)\cong\mathfrak{F}(C)\otimes\mathfrak{F}(D)$, $C,D\in Ob(\mathbb{C})$,

$\zeta:\mathfrak{F}(I)\cong J$,

so dass bestimmte Diagramme kommutieren.

Im dritten Kapitel betrachten wir die $\mathfrak{C}$-Funktoren (entsprechen Homomorphismen zwischen G-Mengen) diese sind, wie erwartet, Funktoren $\mathfrak{F}: \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{N}$, wobei $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{M}$ $\mathfrak{C}$-Kategorien sind, mit einem natürlichen Isomorphismus $\xi: \mathfrak{F}(M \otimes C) \cong \mathfrak{F}(M) \otimes C$, wobei $M \in Ob(\mathfrak{M})$, $C \in Ob(\mathfrak{C})$, so dass zwei Diagramme kommutieren.

Im vierten Kapitel behandeln wir die monoidalen Transformationen, diese sind Transformationen zwischen monoidalen Funktoren, so dass zwei Diagramme kommutieren. Sie bilden einen neuen Problemkreis in unserer Betrachtungen und haben keine Entsprechung bei den Monoiden. Da sie im allgemeinen keine natürliche Isomorphismen sind, müssen wegen der mangelnden Invertierbarkeit die Kohärenzaussagen anders ausfallen: Nur die kanonisch konstruierten Morphismen in ein (Standard-) Objekt sind untereinander gleich.

Im fünften Kapitel betrachten wir die $\mathfrak{C}$-Transformationen, die wie erwartet, natürliche Transformationen zwischen $\mathfrak{C}$-Funktoren sind, so dass ein Diagramm kommutiert.
Pareigis hat in seiner Arbeit "Non-additive ring and module theory II. $\mathfrak{C}$-Categories, $\mathfrak{C}$-Funktors and $\mathfrak{C}$-Morphisms" [12] alle diese Diagramme angegeben.
Unsere Arbeit hier ist zu zeigen, dass diese Diagramme Kohärenzdiagramme sind, d.h. in einfachen Worten, dass sie die Eindeutigkeit der Isomorphismen zwischen Objekten nach sich ziehen.

Um unzulässige Identifizierungen von Objekten, die auf verschiedene Weise dargestellt werden, zu vermeiden müssen wir die formale Bildung dieser Objekte mit Hilfe von zulässigen Zeichenfolgen studieren. Die Menge der zulässigen Zeichenfolgen bildet eine (partiell definierte) Algebra. Häufig sind Induktionsbeweise mit einer gewissen verallgemeinerten Induktion für die zulässigen Zeichenfolgen durchzuführen. Ebenso sind auf ihnen rekursiv definierte Funktionen

zu betrachten.Deswegen führen wir im 0.Kapitel ausser dem Begriff der (partiell definierten) Algebra auch den Begriff einer Peano-Algebra ein,einerAlgebra,in der die Peano-Axiome in verallgemeinerter Weise gelten.

Am Ende,in Kapitel 7,behandeln wir den Fall einer symmetrischen monoidalen Kategorie $\mathfrak{C}$.Das ist eine monoidale Kategorie mit einem zusätzlichen Isomorphismus $\gamma: A \otimes B \cong B \otimes A$, $A, B \in Ob(\mathfrak{C})$,so dass bestimmte Diagramme kommutieren.Mac Lane hat auch diesen Fall in seiner Arbeit "Natural Associativity and Commutativity" betrachtet,aber nur eine Beweisskizze gegeben.Besonders nach dem Gegenbeispiel von Pareigis,sollte man alle Beweise überprüfen und exakt durchführen.Dieser Fall ist in meiner Arbeit aus zeitlichen Gründen nur mit den natürlichen Isomorphismen α und γ behandelt worden. Dies ist genau der Fall,für den Mac Lane seine Beweisskizze gab.

Man könnte den Fall der Kohärenz für α, λ, ρ und γ noch betrachten, ausserdem alle übrigen Fälle ,die ich in meiner Arbeit auf Kohärenz untersucht habe,wobei die dabei verwendeten monoidalen Kategorien symmetrisch sind.

Meinem Betreuer bei dieser Arbeit,Herrn Prof. Dr. B. Pareigis , möchte ich für viele anregende und kritische Diskussionen herzlich danken.

§0 Algebren und Peano-Algebren

0.1 Motivation:

In späteren Kapiteln wollen wir mit vollständiger Induktion einen wesentlichen Satz beweisen.Dazu benötigen wir den Begriff "Rang eines Wortes",der eine natürliche Zahl ist,nach dem man die Induktion führt.Also muss man zeigen,dass der Rang eine wohl definierte Abbildung von den "Worten" nach der Menge der natürlichen Zahlen ist.Deswegen konstruieren wir die Strukturen "Algebren und Peano-Algebren".Die Peano-Algebren sind Algebren mit bestimmten Eigenschaften,die sehr ähnlich zu den Peano-Axiomen der natürlichen Zahlen sind.Die Algebren und die Peano-Algebren sind begleitet von bestimmten Mengen und Abbildungen,die "Typ" heissen.Wir definieren die "Algebrenhomomorphismen" zwischen Algebren von bestimmtem Typ, diese wie man erwartet,Abbildungen mit bestimmten Eigenschaften. Als kategorische Eigenschaften zeigen wir,dass die Algebren von bestimmtem Typ und die zugehörigen Algebren-homomorphismen eine Kategorie bilden,und irgend zwei Peano-Algebren vom selben Typ isomorph sind.Als kategorische Bemerkung zeigen wir,dass eine bestimmte Algebra,bei einem Theorem,das Kategorische Produkt von zwei bestimmten Algebren ist.In einem wichtigen Satz,zeigen wir, dass ein Algebrahomomorphismus von einer Peano-Algebra von bestimmtem Typ nach einer Algebra vom selben Typ immer existiert, damit zeigen wir beim Hauptsatz die Existenz und die Eindeutigkeit einer Abbildung,die unser"Rang" wird.Die "zugehörigen" Strukturen, die man in den nächsten Abschnitt behandelt,sind tatsächlich Peano-Algebren.

Man betrachte im folgenden : M , N , L beliebige Mengen,

$$\alpha:N \longrightarrow \bigcup_{i=2}^{\infty} M^i \quad , \quad \beta:L \longrightarrow M$$

0.2 Definition: Gegeben seien:

$X := (X_i)_{i\in M}$ eine Familie von Mengen,

$S := (s_i)_{i\in N}$ eine Familie von Abbildungen,

$\hat{X} := (x_i)_{i\in L}$ eine Familie von Elementen,

mit folgenden Eigenschaften:

1) $\forall\, i\in N$: $\alpha(i) = (j_1, j_2, \ldots, j_{k+1}) \Rightarrow s_i : X_{j_1} \times X_{j_2} \times \ldots \times X_{j_k} \longrightarrow X_{j_{k+1}}$

2) $\forall\, i\in L$: $\beta(i) = j \Rightarrow x_i \in X_j$

Dann heisst das Tripel $(X, S, \hat{X})$ Algebra vom Typ $(\dagger(M), \dagger(N), \dagger(L), \alpha, \beta)$

(Mit $m := \dagger(M)$ meinen wir die Kardinalzahl von der Menge M)

Eine Algebra vom Typ (m,n,l,α,β) heisst Peano-Algebra vom Typ (m,n,l,α,β) $\Leftrightarrow$

1') $\forall\, i,j\in M$, $i\neq j$: $X_i \cap X_j = \emptyset$

2)a) $\forall\, i,j\in N$, $i\neq j$: $Bi(s_i) \cap Bi(s_j) = \emptyset$

b) $\forall\, i\in N$: s_i injektiv

3)a) $\forall i,j\in L$, $i\neq j$: $\hat{x}_i \neq \hat{x}_j$

b) $\forall j\in N, \forall i\in L$: $\hat{x}_i \notin Bi(s_j)$

4) Sei $A(u)$ eine Aussage über $u \in \bigcup_{i\in M} X_i$

$(\forall\, u\in \bigcup_{i\in M} X_i : A(u)) \Leftrightarrow$

1) $\forall\, i\in L$: $A(x_i)$

2) $\forall\, k$, $\forall\, u_1, \ldots, u_k \in \bigcup_{i\in M} X_i$:

$(A(u_1), \ldots, A(u_k) \Rightarrow \forall\, j\in N$: $A(s_j(u_1, \ldots, u_k))$ so lange $s_j(u_1, \ldots, u_k)$ definiert ist.)

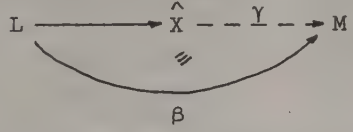
0.3 Bemerkung: Sei $s_j : X_{j_1} \times \ldots \times X_{j_k} \longrightarrow X_{j_{k+1}}$. $s_j(x_1, \ldots, x_k)$ ist definiert $\Leftrightarrow x_1 \in X_{j_1}, \ldots, x_k \in X_{j_k}$, d.h.

$s_j(x_1,\ldots,x_k)$ ist definiert $\Leftrightarrow$ $x_1 \varepsilon X_{j_1},\ldots,x_k \varepsilon X_{j_k}$ mit $\alpha(j) = (j_1,\ldots,j_{k+1})$.

4) in Definition 0.2 gibt uns das Induktionsverfahren in Peano-Algebren.

0.4 Notation: Statt $\bigcup_{i\varepsilon L} \{\hat{x}_j\}$ schreiben wir häufig $\hat{X}$.

0.5 Bemerkung: Sei $(X,S,\hat{X})$ eine Peano-Algebra vom Typ $(m,n,1,\alpha,\beta)$. Es gibt eine 1-1 Korrespondenz zwischen L und $\hat{X}$, nämlich: $i \longleftrightarrow \hat{x}_i$, wobei $i\varepsilon L, \hat{x}_i \varepsilon \hat{X}$ (Im Sinne von Notation 0.4). Wir schreiben $\hat{x}$ statt $\hat{x}_i$. Dann sei $\gamma:\hat{X} \longrightarrow M$ definiert durch:



d.h. $\gamma(\hat{x}) = \beta(i)$. Es ist klar, dass γ eindeutig ist. Nach 2) in Definition 0.2 folgt $\hat{x}\varepsilon X_{\gamma(\hat{x})}$.

Beispiele von Algebren: Eine Gruppe ist in unserem Sinn eine Algebra vom Typ $(1,1,1,\alpha,\beta)$, wobei $\alpha(1) = (1,1,1), \beta(1) = 1$. Auch ein Ring ist in unserem Sinn eine Algebra vom Typ $(1,2,2,\alpha,\beta)$, wobei $\alpha(1) = \alpha(2) = (1,1,1), \beta(1) = \beta(2) = 1$. (N ist ein Ring, also ist es in unserem Sinn eine Algebra vom genannten Typ.) Es stellt sich die Frage, ob die Algebren von bestimmten Typ-als Verallgemeinerung-eine Kategorie bilden, wie im Speziellen die Gruppen oder die Ringe? Die Antwort ist ja.

0.6 Definition: Seien $(X,S,\hat{X}),(Y,T,\hat{Y})$ Algebren vom Typ $(m,n,1,\alpha,\beta)$. Seien $(f_i:X_i \longrightarrow Y_i)_{i\varepsilon M}$, so dass:

i) $\forall\, i\varepsilon L$: $f_{\beta(i)}(x_i) = y_i$

ii) $\forall\, j\varepsilon N$, $\forall\, x_1 X_{j_1},\ldots,x_k X_{j_k}$: $f_i(s_j(x_1,\ldots,x_k)) =$

$t_j(f_{j_1}(x_1),\ldots,f_{j_k}(x_k))$, wobei $\alpha(j) = (j_1,\ldots,j_k,i)$.

Dann heisst die Familie $(f_i:X_i \longrightarrow Y_i)_{i\in M}$ Algebrenhomomorphismus von $(X,S,\hat{X})$ nach $(Y,T,\hat{Y})$. Häufig schreiben wir $f:X \longrightarrow Y$, statt $(f_i:X_i \longrightarrow Y_i)_{i\in M}$.

0.7 Lemma: Die Algebren von einem bestimmten Typ und die zugehörigen Algebrenhomomorphismen bilden eine Kategorie.

Beweis: Seien $(X,S,\hat{X}),(Y,T,\hat{Y}),(Z,R,\hat{Z})$ Algebren vom Typ (m,n,l,α,β), so dass:

$\forall\, i\in L$: $f_{\beta(i)}(x_1) = y_i$,

$\forall\, j\in N, \forall\, x_1\in X_{j_1},\ldots,x_k\in X_{j_k}$:

$f_i(s_j(x_1,\ldots,x_k))=t_j(f_{j_1}(x_1),\ldots,f_{j_k}(x_k))$, wobei $\alpha(j)=$

$(j_1,\ldots,j_k,i)$, (1)

$(g_i:Y_i\longrightarrow Z_i)_{i\in M}$, sodass:

$\forall i\in L:\ g_{\beta(i)}(\hat{y}_i)=\hat{z}_i$,

$\forall j\in N;\forall y_1\in Y_{j_1},\ldots,y_k\in Y_{j_k}: g_i(t_j(y_1,\ldots,y_k))=$

$r_j(g_{j_1}(y_1),\ldots,g_{j_k}y_k))$, wobei $\alpha(j)=(j_1,\ldots,j_k,i)$ (2)

$\Rightarrow \forall i\in L:(gf)_{\beta(i)}(\hat{x}_i)=g_{\beta(i)}(f_{\beta(i)}(\hat{x}_i))=g_{\beta(i)}(\hat{y}_i)=\hat{z}_i$ (*)

$\forall j\in N, \forall x_1\in X_{j_1},\ldots,x_k\in X_{j_k}$:

$(g_if_i)(s_j(x_1,\ldots,x_k))=g_i(t_j(f_{j_1}(x_1),\ldots,f_{j_k}(x_k)))$ $\underset{(2)}{=}$

$r_i(g_{j_1}(f_{j_1}(x_1)),\ldots,g_{j_k}(f_{j_k}(x_k)))=$

$r_i((g_{j_1}f_{j_1})(x_1),\ldots,(g_{j_k}f_{j_k})(x_k))$ (**)

In (*) setze man $gf=h$, in (**) setze man $\forall j\in M: g_jf_j=h_j$, also haben wir:

$$\left.\begin{array}{l}(h_i:X_i\longrightarrow Z_i)_{i\in M}\text{ , mit:}\\ \forall i\in L:h_{\beta(i)}(\hat{x}_i)=\hat{z}_i\\ \forall j\in N,\ \forall x_1\in X_{j_1},\ldots,x_k\in X_{j_k}:h_i(s_j(x_1,\ldots,x_k))=\\ r_i(h_{j_1}(x_1),\ldots,h_{j_k}(x_k))\end{array}\right\}\quad(3)$$

Sei $(X,S,\hat{X})$ eine Algebra vom Typ (m,n,l,α,β). Man definiert $(1_i:X_i\longrightarrow X_i)_{i\in M}$ als Identitätsmorphismus auf X_i .

Man bemerkt, dass $(f_i:X_i\longrightarrow Y_i)_{i\in M}\circ(1_i:Y_i\longrightarrow Y_i)_{i\in M}$

$=(f_i\circ 1_i:X_i\longrightarrow Y_i)_{i\in M}=(f_i:X_i\longrightarrow Y_i)_{i\in M}$

$=(1_i\circ f_i:X_i\longrightarrow Y_i)_{i\in M}$

$=(1_i:X_i\longrightarrow X_i)_{i\in M}\circ(f_i:X_i\longrightarrow Y_i)_{i\in M}$ (4)

Jetzt seien $(f_i:X_i\longrightarrow Y_i)_{i\in M}, (g_i:Y_i\longrightarrow Z_i)_{i\in M}, (h_i:Z_i\longrightarrow W_i)_{i\in M}$, wobei $(X,S,\hat{X}),(Y,T,\hat{Y}),(Z,R,\hat{Z}),(W,P,\hat{W})$ Algebren vom Typ $(m,n,l,\alpha,\beta)\Rightarrow \forall j\in M: h_j(g_jf_j)=(h_jg_j)f_j$, dass heisst:

$(h_i:Z_i\longrightarrow W_i)_{i\in M}\circ((g_i:Y_i\longrightarrow Z_i)_{i\in M}\circ(f_i:X_i\longrightarrow Y_i)_{i\in M})$

$=((h_i:Z_i \longrightarrow W_i)_{i\in M} \circ (g_i:Y_i \longrightarrow Z_i)_{i\in M}) \circ (f_I:X_I \longrightarrow Y_i)_{i\in M}$ (5)

Nach (3)$\wedge$(4)$\wedge$(5) folgt die Behauptung.

Man bemerkt, dass die Morphismen in der Kategorie der Gruppen, oder in der Kategorie der Ringe, die die Homomorphismen sind, genau unsere allgemeinen Algebrenhomomorphismenbedingungen, wie erwartet, erfüllen.

0.8 Bemerkung: In einer Peano-Algebra $(X,S,\hat{X})$ vom Typ (m,n,l,α,β) ist die Familie $(s_j)_{j\in N}$ surjektiv auf $\bigcup_{i\in M} X_i \setminus \hat{X}$.

Beweis: Sei $x\in \bigcup_{i\in M} X_i$, $x\notin \hat{X}$. Zu zeigen: $\exists j\in N: x\in Bi(s_j)$, dass heisst: Zu zeigen: $\exists x_1,\ldots,x_k\in \bigcup_{i\in M} X_i, \exists j\in N: x=s_j(x_1,\ldots,x_k)$

Wir betrachten $Y:=\bigcup_{i\in M} X_i \setminus \{x\}$. Da $Y\neq \bigcup_{i\in M} X_i$, $x\notin \hat{X}$, $\hat{X}\subset Y$, folgt nach 4') in Definition 0.2 unter Verwendung von $A(u)\equiv (u\in Y)$, dass $\exists x_1,\ldots,x_k \in Y \wedge \exists j\in N: s_j(x_1,\ldots,x_k)\notin Y$. Daraus folgt $x=s_j(x_1,\ldots,x_k)$. Da $\forall i\in L, \forall j\in N: \hat{x}_i \notin Bi(s_j) \Rightarrow$ Behauptung.

0.9 Definition: Sei $(X,S,\hat{X})$ eine Algebra vom Typ (m,n,l,α,β). Seien $L':=\{i_1,\ldots,i_t\}\subset L, N':=\{j_1,\ldots,j_r\}\subset N$. Der Durchschnitt aller Mengen A mit der Eigenschaft :

1) $\forall i\in L': \hat{x}_i\in A$

2) $\forall j\in N'$; $\forall x_1,\ldots,x_k\in A: s_j(x_1,\ldots,x_k)\in A$, so lange $s_j(x_1,\ldots,x_k)$ definiert ist (A heisst abgeschlossen bezüglich s_j), heisst die Menge der Nachfolger von $\{x_i \mid i\in L'\}$ mit $\{s_j \mid j\in N'\}$ in Symbolen $D_{s_{N'}}(\hat{x}_{L'})$

Wir geben jetzt ein Lemma, das Teil des nächsten Theorems ist:

0.10 Lemma: Sei $(X,S,\hat{X})$ eine Algebra vom Typ (m,n,l,α,β). Dann ist für $L'\subset L, N'\subset N$, $D_{s_{N'}}(\hat{x}_{L'})$ die kleinste Teilmenge von $\bigcup_{i\in M} X_i$, die $\{\hat{x}_i \mid i\in L'\}$ enthält, und bezüglich $\{s_j \mid j\in N'\}$ abgeschlossen ist. Es gilt $x\in D_{s_{N'}}(\hat{x}_{L'}) \Leftrightarrow x\in\{\hat{x}_i \mid i\in L'\}$ oder es gibt $y_1,\ldots,y_k\in D_{s_{N'}}(\hat{x}_{L'})$

dass für ein $j \in \acute{N}, s_j : X_{i_1} \times \ldots \times X_{i_k} \longrightarrow X_{i_{k+1}} : x = s_j(y_1, \ldots, y_k)$.

Beweis: Der Durchschnitt ist nicht leer, da $\forall A \subset \bigcup_{i \in M} X_i, \forall i \in \acute{L} : \hat{x}_i \in A$ (A wie in Definition 0.9). Der Durchschnitt ist trivial erweise die kleinste Teilmenge von $\bigcup_{i \in M} X_i$, die die obigen Eigenschaften erfüllt.

Zur zweiten Behauptung: Wir betrachten

ein Element ζ in $D_{s_{\acute{N}}}(\hat{x}_{\acute{L}})$. Entweder ist $\zeta \in \{\hat{x}_i \mid i \in L\}$ oder $\zeta \notin \{\hat{x}_i \mid i \in L\}$. Sei $\zeta \notin \{\hat{x}_i \mid i \in L\} \wedge \forall s_j \in \{s_j \mid j \in N\}, \forall (y_1, \ldots, y_k)$,

$y_1, \ldots, y_k \in D_{s_{\acute{N}}}(\hat{x}_{\acute{L}}) : \zeta \neq s_j(y_1, \ldots, y_k)$.

Dann betrachten wir $D_{s_{\acute{N}}}(\hat{x}_{\acute{L}}) \setminus \{\zeta\}$. Dies ist eine echte Teilmenge von $D_{s_N}(x_L)$, die $\{\hat{x}_i \mid i \in \acute{L}\}$ enthält und bezüglich $\{s_j \mid j \in \acute{N}\}$ abgeschlossen ist: Widerspruch zum ersten Teil des Lemmas.

Wir beweisen jetzt folgendes wichtige Theorem, von dem das Ziel ist zu zeigen, dass es einen Homomorphismus von einer Peano-Algebra von bestimmtem Typ in eine Algebra vom selben Typ immer gibt. Der Algebrenhomomorphismus ist eindeutig bestimmt durch besondere Eigenschaften. Dies ist die Hauptidee im Beweis des Hauptsatzes des Kapitels 0.

.11 Theorem: Sei $(X, S, \hat{X})$ eine Peano-Algebra vom Typ (m,n,l,α,β), $(Y, T, \hat{Y})$ eine Algebra vomselben Typ.

Seien $\forall i \in M$: $Z_i := X_i \times Y_i$,

$\forall i \in L$: $\hat{z}_i := (\hat{x}_i, \hat{y}_i) \in X_{\beta(i)} \times Y_{\beta(i)} = Z_{\beta(i)}$,

$\forall i \in N$: $u_i : Z_{r_1} \times \ldots \times Z_{r_{t-1}} \longrightarrow Z_{r_t}$

$u_i(x_1, y_1, \ldots, x_{t-1}, y_{t-1}) := (s_i(x_1, \ldots, x_{t-1}), t_i(y_1, \ldots, y_{t-1}))$

wobei $\alpha(i) = (r_1, \ldots, r_t)$

$s_i : X_{r_1} \times \ldots \times X_{r_{t-1}} \longrightarrow X_{r_t}$, $t_i : Y_{r_1} \times \ldots \times Y_{r_{t-1}} \longrightarrow Y_{r_t}$

Behauptung: $(Z, U, \hat{Z})$ (ähnlich zu Definition 0.2) ist eine Algebra vom Typ (m,n,l,α,β). $D_{u_N}(\hat{z}_L)$ ist Graph eines Algebrenhomomorphismus

f von der Algebra X in die Algebra Y, also mit:

(I) $\forall i \in M$: $f_i : X_i \longrightarrow Y_i$, $f_i := f \cap Z_i$.

(II) $\forall \hat{x} \in \hat{X}$: $f_{\beta(i)}(\hat{x}_i) = \hat{y}_i$,

$$\forall x_1 \in X_{r_1}, \ldots, x_{t-1} \in X_{r_{t-1}} : f_{r_t}(s_i(x_1, \ldots, x_{t-1})) = t_i(f_{r_1}(x_1), \ldots, f_{r_{t-1}}(x_{t-1}))$$

Weiter gilt :

(III) f ist eindeutig bestimmt durch die Eigenschaften in (I) und (II).

Beweis: Es ist klar, dass $(Z, U, \hat{Z})$ eine Algebra vom Typ (m, n, l, α, β) ist. Nach Definition ist $D_{u_N}(\hat{z}_L)$ der Durchschnitt der Kollektion $\mathfrak{A}$ von Mengen A, so dass $A \subset \bigcup_{i \in M} X_i \times Y_i$, $\forall i \in L : (\hat{x}_i, \hat{y}_i) \in A$ und $\forall i \in N, \forall (x_1, y_1), \ldots, (x_{t-1}, y_{t-1}) \in A$: $(s_i(x_1, \ldots, x_{t-1}), t_i(y_1, \ldots, y_{t-1})) \in A$, so lange $s_i(x_1, \ldots, x_{t-1}), t_i(y_1, \ldots, y_{t-1})$ definiert sind.

Wir behaupten dass:

1) $D_{u_N}(\hat{z}_L) \in \mathfrak{A}$: folgt aus 0.10

2) $\forall A \in \mathfrak{A}$: $D_{u_N}(\hat{z}_L) \subset A$: trivial, da $D_{u_N}(\hat{z}_L) = \cap \mathfrak{A}$

3) f ist eine Relation mit Definitionsbereich $\bigcup_{i \in M} X_i$

Beweis: f ist Relation ist klar nach 1) oder 2).

In 4) Definition 0.2 sei $A(u) \equiv (u \in Y)$ wobei Y festgewählte Teilmenge von $\bigcup_{i \in M} X_i$ ist, Y := Definitionsbereich von f.

Also $Y = \bigcup_{i \in M} X_i \Leftrightarrow$ { 1) $\forall i \in L$: $\hat{x}_i \in Y$

2) $\forall k \; \forall u_1, \ldots, u_k \in \bigcup_{i \in M} X_i : (u_1 \in Y, \ldots, u_k \in Y \Rightarrow \forall j \in N : s_j(u_1, \ldots, u_k) \in Y$, so lange $s_j(u_1, \ldots, u_k)$ definiert ist.)

Die rechte Seite gilt nach Definition von $D_{u_N}(\hat{z}_L)$.
Da $f \in \mathfrak{A}$ (nach 1)) und $(X, s, \hat{X})$ Peano-Algebra ist $\Rightarrow$ Definitionsbereich von f ist $\bigcup_{i \in M} X_i$. Also ist $f_i := f \cap Z_i$ eine Relation mit Definitionsbereich X_i.

4) $u' \in D_{u_N}(\hat{z}_L) \Leftrightarrow u' \in \{(\hat{x}_i, \hat{y}_i), i \in L\}$ oder $\exists i \in N \wedge \exists (x_1, y_1) \in \mathrm{Graph}(f_{r_1}), \ldots,$

$(x_{t-1},y_{t-1})\in \mathrm{Graph}(f_{r_{t-1}})$:
$u=(s_i(x_1,\ldots,x_{t-1}),t_i(y_1,\ldots,y_{t-1}))\in \mathrm{Graph}(f_{r_t})$.
Beweis: folgt unmittelbar nach Lemma 0.10

5)f ist eine Abbildung von Xnach Y.

Beweis: Durch Induktion (siehe 4) in Definition 0.2)

Zu zeigen: $\forall x\in \bigcup_{i\in M} X_i, (x,y)\in\mathrm{Graph}(f)\wedge(x,z)\in\mathrm{Graph}(f)\Rightarrow y=z.$

Sei U bestehend aus allen Elementen von $\bigcup_{i\in M}X_i$, für welche das wahr ist. Dann gilt für alle $i\in L: x_i\in U$. Angenommen dass mit $(\hat{x}_i,\hat{y}_i)\in\mathrm{Graph}(f)$ (nach 4) auch $(\hat{x}_i,z)\in\mathrm{Graph}(f)$, $\hat{y}_i\neq z$. Dann gilt nach 4') $\exists i\in N\wedge\exists x_1\in X_{r_1},\ldots,x_{t-1}\in X_{r_{t-1}},y_1\in Y_{r_1},\ldots,y_{t-1}\in Y_{r_{t-1}}$: $(\hat{x}_i,z)=(s_i(x_1,\ldots,x_{t-1}),t_i(y_1,\ldots,y_{t-1}))$. Also $\hat{x}_i=s_i(x_1,\ldots,x_{t-1})$ für ein s_i: Widerspruch zu 3) in Definition 0.2. Also folgt der Induktionsanfang.

Induktionsannahme: Seien $x_1\in X_{r_1}\cap U,\ldots,x_{t-1}\in X_{r_{t-1}}\cap U$ beliebig, (t beliebig)

Induktionsschluss: $\forall s_i$ wenn $s_i(x_1,\ldots,x_{t-1})$ definiert ist:

$(s_i(x_1,\ldots,x_{t-1}),y_1)\in\mathrm{Graph}(f)\wedge(s_i(x_1,\ldots,x_{t-1}),y_2)\in\mathrm{Graph}(f)\Rightarrow$
(nach 4) $\wedge s_i$ injektiv $\wedge j_1\neq j_2\Rightarrow \mathrm{Bi}(s_{j_1})\cap\mathrm{Bi}(s_{j_2})=\emptyset$):

$\exists y_{1,1}\in Y_{r_1},\ldots,y_{1,t-1}\in Y_{r_{t-1}},y_{2,1}\in Y_{r_1},\ldots,y_{2,t-1}\in Y_{r_{t-1}}$:
$y_1=t_i(y_{1,1},\ldots,y_{1,t-1}),y_2=t_i(y_{2,1},\ldots,y_{2,t-1})$,
$(x_1,y_{1,1})\in\mathrm{Graph}(f),\ldots,(x_{t-1},y_{1,t-1})\in\mathrm{Graph}(f)\wedge$
$(x_1,y_{2,1})\in\mathrm{Graph}(f),\ldots,(x_{t-1},y_{2,t-1})\in\mathrm{Graph}(f)$ $\Rightarrow$(nach Induktionsannahme): $y_{1,1}=y_{2,1},\ldots,y_{1,t-1}=y_{2,t-1}$ .Also $U=\bigcup_{i\in M}X_i$. Mit 3) folgt die Behauptung. Jetzt folgt unmittelbar dass $\forall i\in M$: f_i eine Abbildung von X nach Y, das heisst (I).

(II) $\forall i\in L$: $f_{\beta(i)}(\hat{x}_i)=\hat{y}_i$ ist klar.

Nach (I) gilt: wenn $x_1\in X_{r_1},\ldots,x_{t-1}\in X_{r_{t-1}}$, dann $\exists_1\ y_1\in Y_{r_1},\ldots,$

$y_{t-1} \in Y_{r_{t-1}}$: $(x_1, y_1) \in Graph(f_{r_1}), \ldots, (x_{t-1}, y_{t-1}) \in Graph(f_{r_{t-1}})$,

das heisst: $y_1 = f_{r_1}(x_1), \ldots, y_{t-1} = f_{r_{t-1}}(x_{t-1}) \Rightarrow$

$(s_i(x_1, \ldots, x_{t-1}), t_i(y_1, \ldots, y_{t-1})) \in Graph(f)$ (tatsächlich in $Graph(f_{r_t})$);das heisst:

$f_{r_t}(s_i(x_1, \ldots, x_{t-1})) = t_i(f_{r_1}(x_1), \ldots, f_{r_{t-1}}(x_{t-1}))$

Also ist f Algebrenhomomorphismus von der Algebra X in die Algebra Y.

(III) Sei $g = (g_i : X_i \longrightarrow Y_i)_{i \in M}$ mit:

i) $\forall i \in L$: $g_{\beta(i)}(\hat{x}_i) = \hat{y}_i$,

ii) $\forall x_1 \in X_{r_1}, \ldots, x_{t-1} \in X_{r_{t-1}}$: $g_{r_t}(s_i(x_1, \ldots, x_{t-1})) =$

$t_i(g_{r_1}(x_1), \ldots, g_{r_{t-1}}(x_{t-1}))$ .Zu zeigen: f=g

Beweis:durch Induktion in Peano-Algebra.Hier ist die Aussage:

$A(u) \equiv f(u) = g(u)$.Sei $U = \{x \in \bigcup_{i \in M} X_i \mid f(x) = g(x)\}$ Dann ist :

$\forall i \in L$: $\hat{x}_i \in U \Rightarrow$ Induktionsanfang

Induktionsannahme: Seien $x_1 \in X_{r_1} \cap U, \ldots, x_{t-1} \in X_{r_{t-1}} \cap U$

Induktionsschluss: $\forall i \in N$ wenn $s_i(x_1, \ldots, x_{t-1})$ definiert ist:

$f_{r_t}(s_i(x_1, \ldots, x_{t-1})) = t_i(f_{r_1}(x_1), \ldots, f_{r_{t-1}}(x_{t-1}))$

$= t_i(g_{r_1}(x_1), \ldots, g_{r_{t-1}}(x_{t-1}))$ (nach Induktionsannahme)

$= g_{r_t}(s_i(x_1, \ldots, x_{t-1}))$

$\Rightarrow \forall i \in N$, wenn $s_i(x_1, \ldots, x_{t-1})$ definiert ist: $s_i(x_1, \ldots, x_{t-1}) \in U$

$\Rightarrow$ Behauptung.

0.12 Bemerkung: Die Algebra $(Z, U, \hat{Z})$ vom Typ (m,n,l,α,β) gegeben in Theorem 0.11 ist das kategorische Produkt der Algebren $(X, S, \hat{X})$ und $(Y, T, \hat{Y})$ vom Typ (m,n,l,α,β).

Beweis: Gegeben eine Algebra $(W, V, \hat{W})$ vom Typ (m,n,l,α,β) und $(f_i : W_i \longrightarrow X_i)_{i \in M}$ Morphismen und $(g_i : W_i \longrightarrow Y_i)_{i \in M}$

Morphismen mit:

$\forall i \in L$: $f_{\beta(i)}(\hat{w}_i)=\hat{x}_i$,

$\forall i\ N; \forall w_1 \in W_{r_1}, \ldots, w_{t-1} \in W_{r_{t-1}}$:

$f_{r_t}(v_i(w_1,\ldots,w_{t-1}))=s_i(f_{r_1}(w_1),\ldots,f_{r_{t-1}}(w_{t-1}))$, wobei

$v_i : W_{r_1} \times \ldots \times W_{r_{t-1}} \longrightarrow W_{r_t}$, $s_i : X_{r_1} \times \ldots \times X_{r_{t-1}} \longrightarrow X_{r_t}$, das heisst:

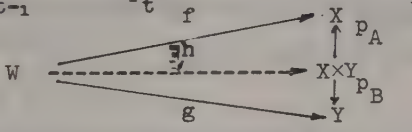
$\alpha(i)=(r_1,\ldots,r_t)$,

$\forall i \in L: g_{\beta(i)}(\hat{w}_i)=\hat{y}_i$,

$\forall i \in N, \forall w_1 \in W_{r_1}, \ldots, w_{t-1} \in W_{r_{t-1}}$:

$g_{r_t}(v_i(w_1,\ldots,w_{t-1}))=t_i(g_{r_1}(w_1),\ldots,g_{r_{t-1}}(w_{t-1}))$, wobei:

$t_i : Y_{r_1} \times \ldots \times Y_{r_{t-1}} \longrightarrow Y_{r_t}$, das heisst: $\alpha(i)=(r_1,\ldots,r_t)$



Behauptung: $\exists_1$ Algebrenhomomorphismus $h : W \longrightarrow X \times Y$, so dass

$p_A \circ h = f$, $p_B \circ h = g$.

Beweis: $\forall w \in W$: $h(w) := (f(w), g(w))$

Zu zeigen: $h : W \longrightarrow X \times Y$ ist Morphismus.

$\forall \hat{w}_i \in W$: $h_{\beta(i)}(\hat{w}_i)=(f_{\beta(i)}(\hat{w}_i), g_{\beta(i)}(\hat{w}_i))=(\hat{x}_i, \hat{y}_i)$

$\forall i \in N, \forall w_1 \in W_{r_1}, \ldots, w_{t-1} \in W_{r_{t-1}}$:

$h_{r_t}(v_i(w_1,\ldots,w_{t-1}))=$

$(s_i(f_{r_1}(w_1),\ldots,f_{r_{t-1}}(w_{t-1})), t_i(g_{r_1}(w_1),\ldots,g_{r_{t-1}}(w_{t-1})))=$

$u_i(f_{r_1}(w_1), g_{r_1}(w_1), \ldots, f_{r_{t-1}}(w_{t-1}), g_{r_{t-1}}(w_{t-1}))$, wobei

$u_i : X_{r_1} \times Y_{r_1} \times \ldots \times X_{r_{t-1}} \times Y_{r_{t-1}} \longrightarrow X_{r_t} \times Y_{r_t}$, das heisst:

$\alpha(i)=(r_1,\ldots,r_t)$ (wie in Theorem 0.11), nach Definition folgt

$h_{r_t}(v_i(w_1,\ldots,w_{t-1}))= u_i(h_{r_1}(w_1),\ldots,h_{r_{t-1}}(w_{t-1}))$.

Es ist klar dass $p_A \circ h = f \wedge p_B \circ h = g$.

Eindeutigkeit von h (trivial): Sei $l : W \longrightarrow X \times Y$ gegeben, so dass:

$p_A \circ l = f \wedge p_B \circ l = g \Rightarrow \forall w \in W: l(w) = (f(w), g(w)) = h(w) \Rightarrow l = h.$

0.13 Folgerung: Irgend zwei Peano-Algebren vomselben Typ sind isomorph.

Beweis: Sei $(X,S,\hat{X})$ Peano-Algebra vom Typ (m,n,l,α,β), $(Y,T,\hat{Y})$ beliebige Algebra vomselben Typ. Nach Theorem 0.11 $\exists_1 f: X \longrightarrow Y$ Algebrenhomomorphismus $\Rightarrow$ $(X,S,\hat{X})$ ist ein Anfangsobjekt in der Kategorie der Algebren vom Typ $(m,n,l,\alpha,\beta) \Rightarrow$ Behauptung.

Jetzt beweisen wir den Hauptsatz mit Hilfe von Theorem 0.11. Die Abbildung, die wir hier bekommen, ist unsere "Rangfunktion", wie wir später sehen. Es ist wesentlich zu zeigen, dass die Abbildung durch gegebene Eigenschaften eindeutig bestimmt ist, so dass die Rangfunktion eindeutig bestimmt wird.

0.14 Hauptsatz: Sei $(X,S,\hat{X})$ eine Peano-Algebra vom Typ (m,n,l,α,β). Seien A eine nicht leere Menge und $(\hat{a}_\nu)_{\nu \in L}$ mit $\hat{a}_\nu \in A$. Seien

$\forall j \in N: g_j: X_{j_1} \times A \times \ldots \times X_{j_k} \times A \longrightarrow A, j_1, \ldots, j_k \in M$ mit $\alpha(j) = (j_1, \ldots, j_k, i)$ gegeben.

Dann gibt es genau eine Abbildung $h: \bigcup_{j \in M} X_j \longrightarrow A$, so dass:

* { i) $\forall \nu \in L: h(\hat{x}_\nu) = \hat{a}_\nu$,

ii) $\forall j \in N; \forall x_1 \in X_{j_1}, \ldots, x_k \in X_{j_k}$:
$h(s_j(x_1, \ldots, x_k)) = g_j(x_1, h(x_1), \ldots, x_k, h(x_k))$

Beweis: Definiere $t_j: X_{j_1} \times A \times \ldots \times X_{j_k} \times A \longrightarrow X_i \times A$, durch

$t_j(x_1, a_1, \ldots, x_k, a_k) = (s_j(x_1, \ldots, x_k), g_j(x_1, a_1, \ldots, x_k, a_k))$, wobei $\alpha(j) = (j_1, \ldots, j_k, i)$

Man wende Theorem 0.11 auf die Peano-Algebra $(X,S,\hat{X})$ und die Algebra $(X \times A, T, \widehat{X \times A}), (X \times A = (X_i \times A)_{i \in M}, \widehat{X \times A} = ((\hat{x}_\nu, \hat{a}_\nu))_{\nu \in L})$ an. Man erhält die Abbildung $f: X \longrightarrow X \times A$ mit:

i) $\forall \hat{x}_\nu \in \hat{X}: f_{\beta(\nu)}(\hat{x}_\nu) = (\hat{x}_\nu, \hat{a}_\nu)$,

ii) $\forall j \in N, \forall x_1 \in X_{j_1}, \ldots, x_k \in X_{j_k}$:

$f_i(s_j(x_1,\ldots,x_k))=t_j(f_{j_1}(x_1),\ldots,f_{j_k}(x_k))$, wobei $\alpha(j)=(j_1,\ldots,j_k,i)$

Man definiert $h: \bigcup_{i\in M} X_i \longrightarrow A$, wobei

i) $\forall \hat{x}_\nu \in \hat{X}$: $h(\hat{x}_\nu)=\hat{a}_\nu$,

ii) $\forall j \in N \; \forall x_1 \in X_{j_1}, \ldots, x_k \in X_{j_k}$:

$h(s_j(x_1,\ldots,x_k))=g_j(f_{j_1}(x_1),\ldots,f_{j_k}(x_k))$, wobei $\alpha(j)=(j_1,\ldots,j_k,i)$

h ist wohldefiniert, da:

i) $(s_j)_{j\in N}$ ist surjektiv auf $\bigcup_{i\in M} X_i \setminus \hat{X}$, das heisst h ist definiert auf allen Punkten von $\bigcup_{i\in M} X_i$

ii) $(X,S,\hat{X})$ ist eine Peano-Algebra, also

a) $\forall j_1, j_2 \in N, j_1 \neq j_2$: $Bi(s_{j_1}) \cap Bi(s_{j_2}) = \emptyset$ ^

b) $\forall j \in N$: s_j injektiv

c) $\forall i,j \in L$: $i \neq j \Rightarrow \hat{x}_i \neq \hat{x}_j$:

iii) $\forall j \in N$: f_j, g_j Abbildungen

Sei $h_i := h|_{X_i}$, also wohldefinierte Abbildung.

Behauptung: $\forall i \in M, \forall x \in X_i$: $f_i(x)=(x,h_i(x))$

Beweis: durch Induktion.

Induktionsanfang: $\forall \nu \in L: f_{\beta(\nu)}(\hat{x}_\nu)=(\hat{x}_\nu,\hat{a}_\nu)=(\hat{x}_\nu,h_{\beta(\nu)}(\hat{x}_\nu))$

Induktionsannahme: es gelte $x_1 \in X_{j_1}, f_{j_1}(x_1)=(x_1,h_{j_1}(x_1)),\ldots,$

$x_k \in X_{j_k}, f_{j_k}(x_k)=(x_k,h_{j_k}(x_k))$

Induktionsschluss: $\forall j \in N, \alpha(j)=(j_1,\ldots,j_k,i), x_1 \in X_{j_1},\ldots,x_k \in X_{j_k}$:

$f_i(s_j(x_1,\ldots,x_k))$ = (nach Definition von f)

$t_j(f_{j_1}(x_1),\ldots,f_{j_k}(x_k))$

= (nach Induktionsannahme)

$t_j(x_1,h_{j_1}(x_1),\ldots,x_k,h_{j_k}(x_k))$

= (nach Definition von t_j)

$(s_j(x_1,\ldots,x_k),g_j(x_1,h_{j_1}(x_1),\ldots,x_k,h_{j_k}(x_k))$

= (nach Induktionsannahme)

$(s_j(x_1,\ldots,x_k),g_j(f_{j_1}(x_1),\ldots,f_{j_k}(x_k))$

$=$(nach Definition von h)

$(s_j(x_1,\ldots,x_k),h_i(s_j(x_1,\ldots,x_k)))$

$\Rightarrow$ Behauptung.

Man setze die Behauptung in die Definition von h ein, dann erhält man das Ergebnis.

Eindeutigkeit von h:

Sei $l:\bigcup_{i\in M} X_i \longrightarrow A$, so dass:

i) $\forall \nu\in L: l(\hat{x}_\nu)=\hat{a}_\nu$,

ii) $\forall j\in N, \forall x_1\in X_{j_1},\ldots,x_k\in X_{j_k}: l(s_j(x_1,\ldots,x_k))=g_j(x_1,l(x_1),\ldots,x_k,l(x_k))$

wobei $\alpha(j)=(j_1,\ldots,j_k,i)$

Also nach i) folgt $\forall\nu\in L: l(\hat{x}_\nu)=h(\hat{x}_\nu)\Rightarrow$ Induktionsanfang.

Induktionsannahme: $x_1\in X_{j_1},\ldots,x_k\in X_{j_k}, l(x_1)=h(x_1),\ldots,$
$l(x_k)=h(x_k)$.

Induktionsschluss: $\forall j\in N,\alpha(j)=(j_1,\ldots,j_k,i),x_1\in X_{j_1},\ldots,x_k\in X_{j_k}$:

$l(s_j(x_1,\ldots,x_k))=g_j(x_1,l(x_1),\ldots,x_k,l(x_k))$

$=$(nach Induktionsannahme)

$g_j(x_1,h(x_1),\ldots,x_k,h(x_k))$

$=h(s_j(x_1,\ldots,x_k))$

$\Rightarrow l=h$

§1 Kohärenz in monoidalen Kategorien und $\mathbb{C}$-Kategorien

Wir definieren eine Menge "M", $M:=\{-, e_o, [,], \sqcap\}$. Dazu konstruieren wir "Z", die Menge der Zeichenreihen mit Buchstaben aus M, dann bilden wir zwei Mengen W_1, W_2 als kleinste Teilmengen von Z mit bestimmten Eigenschaften. Ein "Wort" ist ein Element in W_1 oder in W_2. Die Worte sind rekursiv gebildet, so dass mit ihnen Objekte einer monoidalen Kategorie beziehungsweise $\mathbb{C}$-Kategorie korrespondieren, und zwar sind die Objekte die "Bilder" der Worte. Zum Beispiel ist das Bild von dem Wort "e_o" das ausgezeichnete Element I der monoidalen Kategorie. Man will am Ende einen Beweis durch Induktion in Bezug auf den Aufbau der Worte führen. Deshalb sucht man eine Abbildung, deren Quelle die Menge der Worte ist, die der "Rang" heisst. Der Rang drückt bestimmte Eigenschaften der Worte aus, zum Beispiel wo die Klammen der Worte stehen, ob e_o in einer oder mehreren "Stellen" im Wort auftritt. Jetzt kann man Induktion nach dem Rang führen, da der Rang eine Abbildung ist. Wir definieren was man "Kanten" nennt. Eine Kante ist ein Tripel, die erste und die zweite Komponente sind Worte, die dritte nennt man "Pfeilkante". Pfeilkanten werden abgebildet in Morphismen, die abgeleitet sind von "α", "λ", "ρ" der monoidalen Kategorie. "Wege" sind gewisse endliche Folgen von Kanten. Bei der Abbildung geben die Wege Morphismen in der monoidale Kategorie beziehungsweise der $\mathbb{C}$-Kategorie. Unser Ziel ist zu zeigen, dass die Voraussetzungen aus [12] Kohärenzbedingungen sind, das heisst "die Bilder von zwei Wegen zwischen zwei Worten identisch sind".

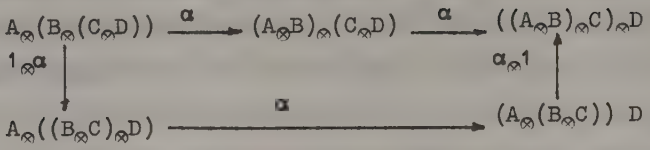
Sei $(\mathbb{C}, \otimes, I)$ eine monoidale Kategorie, das heisst eine Kategorie $\mathbb{C}$, mit einem Funktor $\otimes: \mathbb{C}\times\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ und einem Objekt $I \varepsilon Ob(\mathbb{C})$, und mit natürlichen Isomorphismen:

$\alpha: A_{\otimes}(B_{\otimes}C) \cong (A_{\otimes}B)_{\otimes}C$

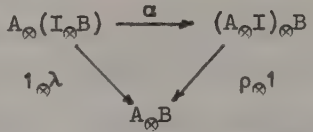
$\lambda: I_{\otimes}A \cong A$

$\rho: A_{\otimes}I \cong A$

so dass die folgenden Diagramme



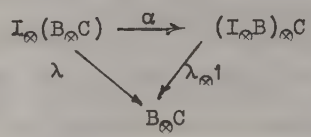
und



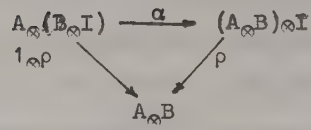
und

kommutieren.

Es folgt nach [9]dass die folgenden Diagramme:



und

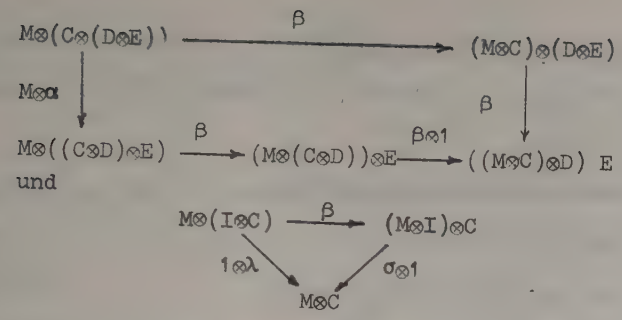


kommutieren.

Sei $\mathfrak{M}$ eine $\mathfrak{C}$-Kategorie [12], das heisst eine Kategorie $\mathfrak{M}$ mit einem Funktor $_{\otimes}: \mathfrak{M} \times \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{M}$ und natürliche Isomorphismen

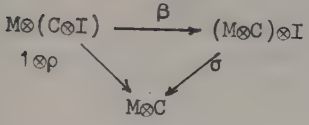
β: $M_{\otimes}(C_{\otimes}D) \cong (M_{\otimes}C)_{\otimes}D$,
$\sigma: M_{\otimes}I \cong M$

so dass die folgenden Diagramme:



und

und



kommutieren.

1.1 Definition: Seien $M := \{[\,,\,], \square, e\,, -, \sim\}$

$Z := \{\emptyset\} \cup M \cup M^2 \cup \ldots$ (Menge der Zeichenreichen mit Buchstaben aus M)

Sei W_1 die kleinste Teilmenge von Z, so dass:

i) $e_\circ \varepsilon W_1 \wedge -\varepsilon W_1$

ii) $u, v \varepsilon W_1 \Rightarrow [u \square v] \varepsilon W_1$.

W_1 existiert, es ist der Durchschnitt aller Teilmengen, die die Bedingungen i)∧ii) erfüllen, nicht leer wegen i).

Sei W_2 die kleinste Teilmenge von Z, so dass:

i') $\sim \varepsilon W_2$

ii) $u \varepsilon W_2 \wedge v \varepsilon W_1 \Rightarrow [u \square v] \varepsilon W_2$

Existenz von W_2: genau wie W_1.

Die Elemente von W_1 oder W_2 werden häufig Worte genannt werden.

1.2 Definition: Seien

$T := \{[\,,\,], \square, 1, \alpha, \lambda, \rho, \bar{\alpha}^1, \bar{\lambda}^1, \bar{\rho}^1, \beta, \sigma, \bar{\beta}^1, \bar{\sigma}^1\}$

$Y := \{\emptyset\} \cup T \cup T^2 \cup \ldots$ (Menge der Zeichenreihen mit Buchstaben aus T)

$k_\alpha := \{([u \square [v \square w]], [[u \square v] \square w], \alpha) \mid u, v, w \varepsilon W_1\}$

$k_\lambda := \{([e_\circ \square u], u, \lambda) \mid u \varepsilon W_1\}$

$k_{\bar{\rho}} := \{([u \square e_\circ], u, \rho) \mid u \varepsilon W_1\}$

$k_{\alpha^{-1}} = \{([[u \square v] \square w], [u \square [v \square w]], \alpha^{-1}) \mid u,v,w \in W_1\}$

$k_{\lambda^{-1}} := \{(u, [e_\circ \square u], \lambda^{-1}) \mid u \in W_1\}$

$k_{\rho^{-1}} := \{(u, [u \square e_\circ], \rho^{-1}) \mid u \in W_1\}$

$l_\beta := \{([u \square [v \square w]], [[u \square v] \square w], \beta) \mid u \in W_2, v,w \in W_1\}$

$l_\sigma := \{([u \square e_\circ], u, \sigma) \mid u \in W_2\}$

$l_{\beta^{-1}} := \{([[u \square v] \square w], [u \square [v \square w]], \beta^{-1}) \mid u \in W_2, v,w \in W_1\}$

$l_{\sigma^{-1}} := \{(u, [u \square e_\circ], \sigma^{-1}) \mid u \in W_2\}$

Seien $\psi_i \in \{\alpha, \lambda, \rho, \alpha^{-1}, \lambda^{-1}, \rho^{-1}\}, i \in N$

$\varphi_j \in \{\beta, \sigma, \beta^{-1}, \sigma^{-1}\}, j \in N$

$K(k_{\psi_i})$ sei die kleinste Teilmenge von $W_1 \times W_1 \times Y$, die k_{ψ_i} enthält, mit:

$*_1$ $(u,v,\varphi) \in K(k_{\psi_i}) \Rightarrow \forall\, w \in W_1 :$ $([u \square w], [v \square w], [\varphi \square 1]) \in K(k_{\psi_i}) \wedge$
$([w \square u], [w \square v], [1 \square \varphi]) \in K(k_{\psi_i})$

$K(l_{\varphi_j})$ sei die kleinste Teilmenge von $W_2 \times W_2 \times Y$, die l_{φ_j} enthält, mit:

$*_2$ $(u,v,\varphi) \in K(l_{\varphi_j}) \Rightarrow \forall w \in W_1 :$ $([u \square w], [v \square w], [\varphi \square 1]) \in K(l_{\varphi_j})$

$K(l_{\psi_i})$ sei die kleinste Teilmenge von $W_2 \times W_2 \times Y$ mit:

$*_3$ $\begin{cases} (u,v,\varphi) \in K(k_{\psi_i}) \Rightarrow \forall w \in W_2 : & ([w \square u], [w \square v], [1 \square \varphi]) \in K(l_{\psi_i}) \wedge \\ (u,v,\varphi) \in K(l_{\psi_i}) \Rightarrow \forall w \in W_1 : & ([u \square w], [v \square w], [\varphi \square 1]) \in K(l_{\psi_i}) \end{cases}$

Bemerkung: Existenz von $K(k_{\psi_i})$: Es ist der Durchschnitt aller Teilmengen von $W_1 \times W_1 \times Y$, die $*_1$ erfüllen, nicht leer, da alle k_{ψ_i} enthalten

Existenz von $K(l_{\varphi_j})$: wie bei $K(k_{\psi_i})$

Existenz von $K(l_{\psi})$: Es ist der Durchschnitt aller Teilmengen von $W_2 \times W_2 \times Y$ mit $*_3$, nicht leer, da $K(k_{\psi_i})$ nicht leer ist und $\sim \varepsilon W_2$

Eine Kante ist ein Element in $K(k_{\psi_i})$ oder in $K(l_{\varphi_j})$ oder in $K(l_{\psi_i})$: das ist ein Tripel, die dritte Komponente in diesem Tripel heisst Pfeilkante.

$K(\psi_i) := K(k_{\psi_i}) \cup K(l_{\psi_i})$,

$K(\varphi_j) := K(l_{\varphi_j})$

$K(\psi_1, \ldots, \psi_s, \varphi_1, \ldots, \varphi_t) := K(\psi_1) \cup \ldots K(\psi_s) \cup K(\varphi_1) \cup \ldots K(\varphi_t)$.

Mit $\overline{K}(k_{\psi_i})$ bzw. $\overline{K}(l_{\varphi_j})$ bzw. $\overline{K}(l_{\psi_i})$ meinen wir die Menge der Pfeilkanten in $K(k_{\psi_i})$ bzw. $K(l_{\varphi_j})$ bzw. $K(l_{\psi_i})$

definition: In der Sprache der Algebren aus Kapitel 0 ist:

$(Z,(s_1,\ldots,s_6),\ \dot{\phi}\ )$ eine Peano-Algebra vom Typ $(1,6,3,\alpha,\beta)$

wobei:

$s_1: Z \longrightarrow Z,\ z \longmapsto z]$ $\quad s_2: Z \longrightarrow Z,\ z \longmapsto z[$ $\quad s_3: Z \longrightarrow Z,\ z \longmapsto ze_o$

$s_4: Z \longrightarrow Z,\ z \longmapsto z-$ $\quad s_5: Z \longrightarrow Z,\ z \longmapsto z\sim$ $\quad s_6: Z \longrightarrow Z,\ z \longmapsto z\square$

$\forall j\in\{1,2,\ldots,6\}: \alpha(j)=(1,1)$, und $\forall \nu\in\{1,2,3\}: \beta(\nu) = 1$

Wir definieren die Anzahl $\#_x(y)$ der Buchstaben $x\in M$ in der Zeichenreihe $y\in M$ (bzw. $x\in T, y\in Y$) wie folgt:

$\#_x(\phi) := 0$,

$\forall j\in\{1,\ldots,6\}: \#_x(s_j(y)) := \#_x(y) + \delta_{xj}$

Wohldefiniertheit: klar.

Rechenregeln: $\#_x(yz) = \#_x(y) + \#_x(z)$ und $\#_x(y) = \delta_{xy}$

Nach Definition von W_1 und wegen 0.10 gilt $W_1 = D_{s_1}(-, e_o)$, wobei $s_1 : W_1 \times W_1 \longrightarrow W_1$ durch $s_1(u,v) = [u \sqcap v]$ definiert ist. Analog ist $W_2 = D_{s_v}(\sim)$, wobei $\forall\, v \in W_1$: $s_v : W_2 \longrightarrow W_2$, $s_v(u) = [u \sqcap v]$.

1.4 Definition: Sei $z \in Z$, sei $s_n(z)$ die Folge der Zeichen von Z, ohne die letzten n Zeichen; genauer

$s_1 : M^n \longrightarrow M^{n-1}$ sei die Projektion auf die ersten n-1 Komponenten.

Das induziert Abbildungen $S_1 : Z \longrightarrow Z$, $s_1(\phi) := \phi$, $s_n := (s_1)^n$, $s_o := 1$

Man beachte: $\forall x \in M$: $s_1(x) = \phi$

Die Länge einer Zeichenreihe Z, wird definiert durch:

$l(z) := n$, falls $s_n(z) = \phi$, $s_{n-1}(z) \neq \phi$, $n \in N$

$l(z) := 0$, falls $z = \phi$.

Bemerkung: $z \in M^n \Leftrightarrow l(z) = n$.

Wir beweisen jetzt eine Folge von kurzen Lemmas und Hilfssätzen, um zu zeigen, dass ein Wort eindeutig darstellbar ist, d.h. falls es zwei Darstellungen eines Wortes gibt: $w = [u \sqcap v] = [r \sqcap s] \Rightarrow u = r \wedge v = s$. Für e_o, -, gibt es keineswegs andere Darstellung.

1.5 Lemma: $\forall y, z \in Z, \forall x \in M$: $\#_x(yz) = \#_x(y) + \#_x(z)$

Beweis: durch Induktion nach $l(z)$.

Induktionsanfang: $l(z) = 0 \Rightarrow \#_x(y\phi) = \#_x(y) = \#_x(y) + \#_x(\phi)$

Induktionsannahme: Behauptung richtig für $l(z) \leqslant n$.

Induktionsschluss: Sei $l(z) = n+1$. Wir setzen $z = z'x'$, $l(z') = n$, $x' \in M$.

$\#_x(yz) = \#_x(yz'x') = $ (nach Definition) $\#_x(yz') + \#_x(x') = $ (nach Induktionsannahme) $\#_x(y) + \#_x(z') + \#_x(x') = $ (nach Definition) $\#_x(y) + \#_x(z'x')$ $= \#_x(y) + \#_x(z)$.

1.6 Hilfssatz: i) $w \in W_1 \Rightarrow \#_{[\,]}(w) = \#_{]\,[}(w)$

ii) $w \in W_2 \Rightarrow \#_{[\,]}(w) = \#_{]\,[}(w)$

Beweis zu i): durch Induktion nach $\#_{\sqcap}(w)$

Induktionsanfang: $\#_{\sqcap}(w) = 0 \Rightarrow w = e_o \vee w = -$, $\#_{[\,]}(w) = \#_{]\,[}(w) = 0$ (vgl. 0.10)

Induktionsannahme: sei Behauptung richtig für $\#_o(w) \leqslant n$.

Induktionsschluss: $\#_o(w) = n+1$.

Da $W_1 = D_{s_1}(e_o, -)$, hat $w \in W_1$, mit $\#_o(w) = n+1$ die Form $w = [u \square v]$ $\Rightarrow$ (nach Lemma 1.5) $\#_o(u) \leqslant n \wedge \#_o(v) \leqslant n$. $\#_L(w) =$ (nach Lemma 1.5) $\#_L(u) + \#_L(v) + 1$ = (nach Induktionsannahme) $\#_J(u) + \#_J(v) + 1 =$ (nach Lemma 1.5) $\#_J(w)$.

Beweis zu ii): durch Induktion nach $\#_o(w)$

Induktionsanfang: $\#_o(w) = 0 \Rightarrow w = \sim \Rightarrow \#_L(w) = \#_J(w)$ (vgl. 0.10)

Induktionsannahme: sei Behauptung richtig für $\#_o(w) \leqslant n$

Induktionsschluss: $\#_o(w) = n+1$. Da $W_2 = D_{s_v}(\sim)$, hat w die Form $w = [u \square v]$, $u \in W_2$, $v \in W_1$. Dann ganz analog zu i), mit Ausnutzung des Resultats dort.

1.7 Lemma: $y, z \in Z, l(z) = n \Rightarrow \forall t \leqslant n, s_t(yz) = y s_t(z)$.

Beweis durch Induktion nach t.

Induktionsanfang: t=0, trivial, da $s_o = 1$

Induktionsannahme: sei die Behauptung richtig für t=m, m<n, d.h.

$s_m(yz) = y s_m(z)$

Induktionsschluss: $m+1 \leqslant n$, $s_{m+1}(yz) = s_{1+m}(yz) = s_1(s_m(yz)) =$ (nach Induktionsannahme) $s_1(y s_m(z)) = y s_{m+1}(z)$

Bemerkung: $s_m(z) \neq \phi$, da m<n)

1.8 Lemma: $w = [u \square v] \Rightarrow l(w) = l(u) + l(v) + 3$

Beweis: $s_{l(u)+l(v)+3}(w) = s_{1+l(u)+1+l(v)+1}(w) = s_1 \circ s_{l(u)} \circ s_1 \circ s_{l(v)} \circ s_1(w)$

$= \phi$

$s_{l(u)+l(v)+2}(w) = s_{l(u)} \circ s_1 \circ s_{l(v)} \circ s_1([u \square v]) = [\,] \neq \phi \Rightarrow$ Behauptung.

1.9 Lemma: $w = [u \square v], t = l(v)+2 \Rightarrow s_t(w) = [u$

Beweis: $s_t(w) = s_{l(v)+2}([u \square v]) = s_1 \circ s_{l(v)} \circ s_1([u \square v]) = s_1 \circ s_{l(v)}([u \square v$

$= s_1([u_\square) \Rightarrow$ Behauptung.

1.10 Hilfssatz: $w \in W_1 \cup W_2 \Rightarrow \#_L(s_n(w)) - \#_J(s_n(w)) > 0$, falls $s_n(w) \neq \phi, n > 0$

Bewis: Wir betrachten $w \in W_1$. Der Fall $w \in W_2$ ist ganz analog.

Wir führen Induktion nach l(w).

Induktionsanfang: $l(w) = 0 \Rightarrow w = \phi \Rightarrow s_n(\phi) = \phi$

Induktionsannahme:Behauptung richtig für alle w mit $l(w)<m$

Induktionsschluss:auf m

1) $w=-\Rightarrow s_n(w)=\phi \Rightarrow$ Behauptung

2) $w=e_o \Rightarrow s_n(w)=\phi \Rightarrow$ Behauptung

3) $w=[u\square v]$ mit $u,v\in W_1 \Rightarrow$ (nach Lemma 1.8) $l(w)=l(u)+l(v)+3$

$\Rightarrow l(u)<l(w)=m>l(v)$

Sei $t=l(v)+2 \Rightarrow$ (nach Lemma 1.9) $s_t(w)=[u$

a) $\#_\ell(s_t(w))=$(nach Lemma 1.5)$\#_\ell(u)+1$

$=\#_j(s_t(w))=$(nach Lemma 1.5)$\#_j(u)$

$\Rightarrow \#_\ell(s_t(w))-\#_j(s_t(w))=1>0$

b) $s_{t+r}(w)=s_r([u)=$(nach Lemma 1.7) $[s_r(u)$ für $r\leq l(u) \Rightarrow$

$\#_\ell(s_{t+r}(w))=\#_\ell([s_r(u))=1+\#_\ell(s_r(u))$

$\#_j(s_{t+r}(w))=\#_j([s_r(u))=\#_j(s_r(u))$

$\#_\ell(s_{t+r}(w))-\#_j(s_{t+r}(w))=1+\#_\ell(s_r(u))-\#_j(s_r(u))\geq 1$, $1\leq r\leq l(u)$

(nach Induktionsannahme)

c) $s_{t-1-r}(w)=s_{1(v)+1-r}([u\square v])=$(nach Lemma 1.7) $[u\square s_{1(v)-r}(v)$, $0\leq r\leq 1$

$\Rightarrow \#_\ell(s_{t-1-r}(w))=\#_\ell([u\, s_{1(v)-r}(v))=1+\#_\ell(u)+\#_\ell(s_{1(v)-r}(v))$

$\geq$($u,v\in W_\wedge$nach Induktionsannahme$_\wedge$ Lemma 1.6) $1+\#_j(u)+\#_j(s_{1(v)-r}(v))$

$>\#_j(u)+\#_j(s_{1(v)-r}(v))=\#_j([u\square s_{1(v)-r}(v))=\#_j(s_{t-1-r}(w))$, $r\leq l(v)$.

Jetzt können wir zeigen,dass die Worte eindeutig darstellbar sind.

Das ist explizit im nächsten Satz bewiesen.

1.11 Satz: $w\in W_1 \cup W_2, w=[u\square v]=[\tilde{u}\square\tilde{v}], u,v,\tilde{u},\tilde{v}\in W \Rightarrow u=\tilde{u}\ v=\tilde{v}$

Beweis:Sei $w\in W_1$.Nach Lemma 1.9 setze man $l(v)=n \Rightarrow s_{n+2}([u\square v])=[u$,

$l(\tilde{v})=m \Rightarrow s_{m+2}([\tilde{u}\square\tilde{v}])=[\tilde{u}$.O.E.d.A. $n\leq m, m=t+n \Rightarrow s_t([u)=s_t\circ s_{n+2}(w)$

$=s_{t+n+2}(w)=s_{m+2}(w)=[\tilde{u}\Rightarrow s_t(u)=\tilde{u} \Rightarrow t=0$(nach Hilfssatz 1.6 Hilfssatz 1.

$u=\tilde{u}$. Symmetrisch $v=\tilde{v}$.Der Fall $w\in W_2$ ist ganz analog.

Bemerkung:In 1.12 zeigen wir,dass $(W,S,\hat{X})$ mit $W=(W_1,W_2)$, $S=(s_1,s_2)$,

$X=(e_o,-,\sim)$, $s_1: W_1\times W_1 \longrightarrow W_1$, $s_2: W_2\times W_1 \longrightarrow W_2$

$(u,v)\longmapsto [u\square v]$ $(u,v)\longmapsto [u\square v]$

Peano-Algebra ist,also ist es unmöglich zu schreiben e_o oder - oder $\sim$ als $[u_\square v]$.

1.12 Satz und Definition: $(W,S,\hat{X})$ mit $W=(W_1,W_2)$, $S=(s_1,s_2)$, $\hat{X}=(e_o,-,\sim)$,

$s_1: W_1 \times W_1 \longrightarrow W_1$, $s_2: W_2 \times W_1 \longrightarrow W_2$

$(u,v) \longmapsto [u_\sqcap v]$ $(u,v) \longmapsto [u_\sqcup v]$

ist eine Peano-Algebra vom Typ $(2,2,3,\alpha,\beta)$, $\alpha(1)=(1,1,1)$, $\alpha(2)=(2,1,2)$, $\beta(1)=1$, $\beta(2)=1$, $\beta(3)=2$.

Bew.: $(W,S,\hat{X})$ ist eine Algebra: klar. Zu zeigen, dass es Peano-Algebra ist.

$Bi(s_1) \cap Bi(s_2)=\phi$, da $W_1 \cap W_2=\phi$ (klar)

$s_1 \wedge s_2$: injektiv: nach Satz 1.11

Es ist klar, dass $\forall\, u,v \in W_1: -\neq[u_\sqcap v]$, $\forall\, u \in W_2, v \in W_1: \sim\neq[u_\sqcap v]$, $\forall\, u,v \in W_1: e_o \neq [u_\sqcup v]$

$A(u)$ sei eine Aussage über $u \in W_1 \cup W_2$, so dass gelten:

(1) (Induktionsanfang) $A(e_o) \wedge A(-) \wedge A(\sim)$

(2) (Induktionsannahme) Gelten $A(u_1), A(u_2)$ $A(u_1'), u_1, u_1' \in W_1$, $u_2 \in W_2$, so

(Induktionsschluss) Gelten auch $A([u_1 \sqcap u_1']) \wedge A([u_2 \sqcup u_1]) \wedge A([u_2 \sqcap u_1'])$

Zu zeigen: $A(u)$ für alle $u \in W_1 \cup W_2$

Man betrachte $\{u \in W_1 \cup W_2 \mid A(u)\} = \{u \in W_1 \mid A(u)\} \cup \{u \in W_2 \mid A(u)\} \subset W_1 \cup W_2$.

$\{u \in W_1 \mid A(u)\}$ erfüllt i) in Definition 1.1 nach (1), erfüllt ii) nach (2).

$\{u \in W_2 \mid A(u)\}$ erfüllt i') nach (1), erfüllt ii') nach (2). Aber W_1 und W_2 sind kleinste Teilmengen mit solchen Eigenschaften $\Rightarrow \{u \in W_1 \mid A(u)\} = W_1$

$\{u \in W_2 \mid A(u)\} = W_2 \Rightarrow \forall\, u \in W_1 \cup W_2 : A(u) \Rightarrow$ Behauptung.

Wir definieren $g_1: W_1 \times N \times W_1 \times N \longrightarrow N$

$(u,r,v,s) \longmapsto r+s+\#_\sqcap(v)+1$

und $g_2: W_2 \times N \times W_1 \times N \longrightarrow N$

$(u,r,v,s) \longmapsto r+s+\#_\sqcup(v)+1$

Also folgt nach 0.14, dass es genau eine Abbildung Rg gibt,

$Rg: W_1 \cup W_2 \longrightarrow N$, so dass:

$Rg(e_o)=Rg(-)=Rg(\sim)=0$,

$\forall\, u,v \in W_1: Rg([u_\sqcup v])=Rg\,(s_1(u,v))=g_1(u,h(u),v,h(v))=h(u)+h(v)+\#_\sqcap(v)+1$,

$\forall\, u \in W_2, v \in W_1$: $Rg([u \circ v]) = Rg(s_2(u,v)) = g_2(u,h(u),v,h(v)) = h(u)+h(v)+\#_\circ(v$

Diese Abbildung ist unser Rang, also ist der Rang eine Abbildung

Nachdem wir den Begriff "Rang" eines Wortes definiert haben, beweisen wir ein Lemma, das die Differenz der Anzahl der "$\circ$" untersucht nach dem Verwenden von $x, \bar{x} \in K(\alpha,\lambda,\rho,\beta,\sigma)$

1.13 Lemma: i) $(u,v,f) \in K(\alpha,\beta) \Rightarrow \#_\circ(u) = \#_\circ(v)$

ii) $(u,v,f) \in K(\lambda,\rho,\sigma) \Rightarrow \#_\circ(u) = \#_\circ(v)+1$

Beweis: durch Induktion nach $\#_\circ(f)$.

Induktionsanfang: $\#_\circ(f)=0 \Rightarrow f=\alpha \vee f=\beta$

Induktionsannahme: Behauptung richtig für $\#_\circ(f) \leq n$.

Induktionsschluss: $\#_\circ(f)=n+1$ Es gibt Mögli chkeiten (wegen 0.10 und der Algebrenstruktur der Kanten)

1) $f=[g \square 1]$, d.h. $(u,v,f)=([u_1 \square w],[v_1 \square w],[g \square 1]), (u_1,v_1,g) \in K(\alpha,\beta), \#_\circ(g)$

(nach Induktionsannahme) $\#_\circ(u_1) = \#_\circ(v_1) \Rightarrow$ (nach Lemma 1.5) $\#_\circ([u_1 \square w])$

$= \#_\circ(u_1)+\#_\circ(w)+1 = \#_\circ(v_1)+\#_\circ(w)+1 = \#_\circ([v_1 \square w])$

2) $f=[1 \square g]$, d.h. $(u,v,f)=([w \square u_1],[w \square v_1],[1 \square g]), (u_1,v_1,g) \in K(\alpha,\beta), \#_\circ(g$

analog zu 1). $\Rightarrow$ Behauptung.

ii) auch durch Induktion nach $\#_\circ(f)$

Induktionsanfang: $\#_\circ(f)=0 \Rightarrow f=\lambda \vee f=\rho \vee f=\sigma$ (nach Lemma 1.5, Definitio 1.3) Behauptung.

Induktionsannahme: Behauptung richtig für $\#_\circ(f) \leq n$

Induktionsschluss: $\#_\circ(f)=n+1$: Es gibt zwei Möglichkeiten:

1) $f=[g \square 1]$, d.h. $(u,v,f)=([u_1 \square w],[v_1 \square w],[g \square 1]), (u_1,v_1,g) \in K(\lambda,\rho,\sigma), \#$

$= n \Rightarrow \#_\circ([u_1 \circ w]) = \#_\circ(u_1)+1+\#_\circ(w) =$ (nach Induktionsannahme)

$= \#_\circ(v_1)+1+1+\#_\circ(w) = \#_\circ([v_1 \square w])+1$ (nach Lemma 1.5, Definition 1.3)

2) $f=[1 \square g]$, d.h. $(u,v,f)=([w \square u'],[w \square v'],[1 \square g]), (u',v',g) \in K(\alpha,\beta,\sigma)$

$\#_\circ(g)=n \Rightarrow ([w \circ u']) =$ (nach Lemma 1.5 Definition 1.3)

$= \#_\circ(w)+1+\#_\circ(u') =$ (nach Induktionsannahme) $\#_\circ(w)+1+\#_\circ(v')+1$

$=$ (nach Lemma 1.5 Definition 1.3) $\#_\circ([w \square v'])+1 \Rightarrow$ Behauptung

1.14 Satz: $(u_1,u_2,x)\varepsilon K(\alpha,\lambda,\rho,\beta,\sigma) \Rightarrow Rg(u_2)< Rg(u_1)$

Beweis: Wir betrachten zunächst $(u_1,u_2,x)\varepsilon K(\alpha)$, führen Induktion nach $\#_\alpha(x)$

Induktionsanfang: $\#_\alpha(x)=0 \Rightarrow x=\alpha\frown(u_1,u_2,x)=([u\square[v\square w]],[[u\square v]\square w],\alpha)$

(1) $Rg([u\square[v\square w]])=Rg(u)+Rg([v\square w])+\#_\rho([v\square w])+1$

$=Rg(u)+Rg(v)+Rg(w)+\#_\rho(w)+\#_\alpha([v\square w])+2$

(2) $Rg([[u\square v]\square w])=Rg([u\square v])+ +Rg(w)+\#_\alpha(w)+1$

$=Rg(u)+Rg(v)+R(w)+\#_\alpha(w)+\#_\rho(v)+2$

(1)-(2) $\Rightarrow Rg([u\square[v\square w]])-Rg([[u\square v]\square w])=\#_\alpha([v\square w])-\#_\alpha(v)$

=(nach Lemma 1.5 Definition 1.3) $1+\#_\alpha(w)>0$

Induktionsannahme: Behauptung richtig für alle (u_1,u_2,x) mit $\#_\alpha(x)\leq n$

Induktionsschluss: $\#_\alpha(x)=n+1 \Rightarrow$ Es gibt zwei Möglichkeiten:

i) $x=[x'\square 1]$, wobei $\#_\alpha(x')=n$, $(u_1,u_2,x)=([u\square w],[v\square w],[x'\square 1])\frown(u,v,x')$ $\varepsilon K(\alpha)$

$Rg([u\square w])-Rg([v\square w])=Rg(u)+Rg(w)+\#_\alpha(w)+1-Rg(v)-Rg(w)-\#_\alpha(w)-1$

$=Rg(u)-Rg(v)>0$ (nach Induktionsannahme)

ii) $x=[1\square x']$, wobei $\#_\alpha(x')=n$, $(u_1,u_2,x)=([w\square u],[w\square v],[1\square x'])$, $(u,v,x')\varepsilon K(\alpha)$

$Rg([w\square u])-Rg([w\square v])=Rg(w)+Rg(u)+\#_\alpha(u)+1-Rg(w)-Rg(v)-\#_\alpha(v)-1$

=(nach Lemma 1.13) $Rg(u)-Rg(v)>0$ (nach Induktionsannahme) $\Rightarrow$ Behauptung

Ganz analog behandelt man den Fall (u_1,u_2,x) $K(\beta)$. Im Schluss der Induktion existiert nur die Möglichkeit $x=[x'\square 1]$

Jetzt betrachten wir den Fall $(u_1,u_2,x)\varepsilon K(\lambda)$, führen wieder Induktion nach $\#_\alpha(x)$

Induktionsanfang: $\#_\alpha(x)=0 \Rightarrow x=\lambda$, $(u_1,u_2,x)=([e_o\square u],u,\lambda)$

$Rg([e_o\square u])=Rg(e_o)+Rg(u)+\#_\alpha(u)+1> Rg(u)$

Induktionsannahme: Behauptung richtig für alle (u_1,u_2,x), mit $\#_\alpha(x)\leq n$

Induktionsschluss: $\#_\alpha(x)=n+1$. Es gibt zwei Mögkichkeiten:

i) $x=[x'\square 1]$, $(u_1,u_2,x)=([u\square w],[v\square w],[x'\square 1])$, $(u,v,x')\varepsilon K(\lambda)$, $\#_\alpha(x)=n$

$Rg([u\square w])-Rg([v\square w])=Rg(u)+Rg(w)+\#_\alpha(w)+1-Rg(v)-Rg(w)-\#_\alpha(w)-1$

$=Rg(u)-R_g(v)>0$ (nach Induktionsannahme)

ii) $x=[1\square x']$, $(u_1,u_2,x)=([w\square u],[w\square v],[1\square x'])$, $(u,v,x')\varepsilon K(\lambda)$, $\|_\sigma(x')=n$

$R_G([w\square u])-Rg([w\square v])=Rg(w)+Rg(u)+\|_\sigma(u)+1-Rg(w)-Rg(v)-\|_\sigma(v)-1$

$==$(nach Lemma 1.13)$Rg(u)-Rg(v)+1>0$ (nach Induktionsannahme)

Der Fall $(u_1,u_2,x)\varepsilon K(\rho)$ ist ganz analog zu dem Fall (u_1,u_2,x) $\varepsilon K(\lambda)$. Der Beweis des Falls (u_1,u_2,x) $K(\sigma)$ geht ähnlich, aber im Schluss der Induktion gibt es nur die Möglichkeit $x=[x'\square 1]$

Also ist der Satz bewiesen.

1.15 Definition: Ein Weg von u nach v ($u,v\varepsilon W_1$ bzw. $u,v\varepsilon W_2$) ist eine Folge Kanten aus $K(k_{\psi_i})$ bzw. $K(l_{\varphi_j})$ oder $K(l_{\psi_i})$:

$(u,x_1,\varphi_1),(x_1,x_2,\varphi_2),\ldots,(x_n,v,\varphi_{n+1})$

1.16 Die Bilder: Sei $(\mathfrak{C},\otimes,I)$ eine monoidale Kategorie, $\mathfrak{M}$ eine $\mathfrak{C}$-Kategorie, $B\varepsilon Ob(\mathfrak{C})$, $X\varepsilon Ob(\mathfrak{M})$. Wir haben schon in 1.12 gesehen, dass $(W,S,\hat{X})$ mit $W=(W_1,W_2)$, $S=(s_1,s_2)$, $\hat{X}=(e_o,-,\sim)$,

$s_1:W_1\times W\longrightarrow W_1$, $s_2:W_2\times W_1\longrightarrow W_2$

$(u,v)\longmapsto[u\square v]$ $(u,v)\longmapsto[u\square v]$

eine Peano-Algebra ist. Jetzt definieren wir:

$Q:=Ob(\mathfrak{C})\cup Ob(\mathfrak{M})\cup\{\infty\}$

$g_1:W_1\times Q\times W_1\times Q\longrightarrow Q$, mit:

$$g_1(u,r,v,s)=\begin{cases}r\otimes s, \text{falls } r,s\varepsilon Ob(\mathfrak{C})\\ \infty, \text{sonst.}\end{cases}$$

$g_2:W_2\times Q\times W_1\times Q\longrightarrow Q$, mit:

$$g_2(u,r,v,s)=\begin{cases}r\otimes s, \text{falls } r\varepsilon Ob(\mathfrak{M}), s\varepsilon Ob(\mathfrak{C})\\ \infty, \text{sonst.}\end{cases}$$

Also, nach 0.14 existiert genau eine Abbildung $h:W_1\times W_2\longrightarrow Q$, so dass:

i) $h(e_o)=I, h(-)=B, h(\sim)=X$

ii) $\forall\, u,v\ W_1$:

$h([u\square v])=h(s_1(u,v))\neq g_1(u,h(u),v,h(v))=h(u)\otimes h(v)$

Man setze $h(u)=u_B$, $h(v)=v_B$, also:

$h([u \square v]) = u_B \otimes v_B$

$\forall\ u \in W_2, v \in W_1$:

$h([u \square v]) = h(s_2(u,v)) = g_2(u, h(u), v, h(v)) = h(u) \otimes h(v)$

Man setze $h(u) = u_X, h(v) = v_B$, also:

$h([u \square v]) = u_X \otimes v_B$

Es ist wesentlich zu bemerken, dass: $\forall\ w \in W_1 \cup W_2$: $h(w) \neq \infty$, also ist kein Wort "verloren". Der Beweis ist direkt durch Induktion nach Anzahl der "$\square$" in w.

Wir nennen u , v "die Bilder" von u und v

Lemma: $(K, S, \hat{K})$, wobei $K = (K(k_{\psi_i}), K(1_{\varphi_j}), K(1_{\psi_i}))$, $S = (s_{1,w}, \ldots, s_{5,w})$, $K = (k_\alpha, k_\lambda, k_\rho, k_\alpha^{-1}, k_\lambda^{-1}, k_\rho^{-1}, 1_\beta, 1_\sigma, 1_\beta^{-1}, 1_\sigma^{-1})$, $(w \in W_1 \cup W_2)$

(Wir schreiben K_1 statt $K(k_{\psi_1})$, K_2 statt $K(1_{\varphi_j})$, K_3 statt $K(1_{\psi_i})$)

$s_{1,w} : K_1 \longrightarrow K_1$

$(u,v,x) \longmapsto ([u \square w], [v \square w], [x \square 1]), w \in W_1$

$s_{2,w} : K_1 \longrightarrow K_1$

$(u,v,x) \longmapsto ([w \square u], [w \square v][1 \square x]), w \in W_1$

$s_{3,w} : K_2 \longrightarrow K_2$

$(u,v,x) \longmapsto ([u \square w], [v \square w], [x \square 1]), w \in W_1$

$s_{4,w} : K_1 \longrightarrow K_3$

$(u,v,x) \longmapsto ([w \square u], [w \square v], [1 \square x]), w \in W_2$

$s_{5,w} : K_3 \longrightarrow K_3$

$(u,v,x) \longmapsto ([u \square w], [v \square w], [x \square 1]), w \in W_1$

ist Peano-Algebra vom Typ $(3, \chi_\bullet, 10, \alpha, \beta)$, $\alpha(1) = (1,1)$, $\alpha(2) = (1,1)$, $\alpha(3) = (2,$ $\alpha(4) = (1,2)$, $\alpha(5) = (3,3)$, $\forall\ i \in \{1, \ldots, 6\}$ $\beta(i) = 1$, $\forall\ i \in \{7, \ldots, 10\}$ $\beta(i) = 2$

Beweis: direktes Nachrechnen.

Jetzt betrachten wir $(\mathfrak{C}, \otimes, I)$ eine monoidale Kategorie, $\mathfrak{M}$ eine $\mathfrak{C}$ -Kategorie, $B \in Ob(\mathfrak{C})$, $X \in Ob(\mathfrak{M})$. Wir schreiben $(u_B, v_B, \varphi) \in \mathfrak{C}$ d.h. $u_B, v_B \in Ob(\mathfrak{C})$ φ ist ein Morphism von u_B nach v_B $\in Mor(\mathfrak{C})$. Analog $(u_X, v_X, \varphi) \in \mathfrak{M}$

Wir definieren: $Q := \mathbb{C} \cup \mathbb{H} \cup \{\infty\}$

$g_{1,w}: K_1 \times Q \longrightarrow Q$, mit:

$$g_{1,w}((u,v,\varphi),(r,s,\psi)) = \begin{cases} (r \otimes w_B, s \otimes w_B, \psi \otimes 1), \text{falls } (r,s,\psi) \in \mathbb{C} \\ \infty \text{ , sonst.} \end{cases} \quad (w \in W_1)$$

$g_{2,w}: K_1 \times Q \longrightarrow Q$, mit:

$$g_{2,w}((u,v,\varphi),(r,s,\psi)) = \begin{cases} (w_B \otimes r, w_B \otimes s, 1 \otimes \psi), \text{falls } (r,s,\psi) \in \mathbb{C} \\ \infty \text{ , sonst.} \end{cases} \quad (w \in W_1)$$

$g_{3,w}: K_2 \times Q \longrightarrow Q$, mit:

$$g_{3,w}((u,v,\varphi),(r,s,\psi)) = \begin{cases} (r \otimes w_B, s \otimes w_B, \psi \otimes 1), \text{falls } (r,s,\psi) \in \mathbb{H} \\ \infty \text{ , sonst.} \end{cases} \quad (w \in W_1)$$

$g_{4,w}: K_1 \times Q \longrightarrow Q$, mit:

$$g_{4,w}((u,v,\varphi),(r,s,\psi)) = \begin{cases} (w_X \otimes r, w_X \otimes s, 1 \otimes \psi), \text{falls } (r,s,\psi) \in \mathbb{C} \\ \infty \text{ , sonst.} \end{cases} \quad (w \in W_2)$$

$g_{5,w}: K_3 \times Q \longrightarrow Q$, mit:

$$g_{5,w}((u,v,\varphi),(r,s,\psi)) = \begin{cases} (r \otimes w_B, s \otimes w_B, \psi \otimes 1), \text{falls } (r,s,\psi) \in \mathbb{H} \\ \infty \text{ , sonst} \end{cases} \quad (w \in W_1)$$

Nach 0.14 existiert genau eine Abbildung $h_1: K_1 \cup K_2 \cup K_3 \longrightarrow Q$, so dass:

$\forall \varphi \in \{\alpha, \lambda, \rho, \bar{\alpha}^1, \bar{\lambda}^1, \bar{\rho}^1, \beta, \sigma, \bar{\beta}^1, \bar{\sigma}^1\}$: $h_1(u,v,\varphi) = (h(u), h(v), \varphi)$, und:

$\forall (u,v,\varphi) \in K_1, w \in W_1$:

$h_1([u \square w], [v \square w], [\varphi \square 1]) = h_1(s_{1,w}(u,v,\varphi)) = g_{1,w}((u,v,\varphi), h_1(u,v,\varphi))$

$\forall (u,v,\varphi) \in K_1, w \in W_1$:

$h_1([w \square u], [w \square v], [1 \square \varphi]) = h_1(s_{2,w}(u,v,\varphi)) = g_{2,w}((u,v,\varphi), h_1(u,v,\varphi))$

$\forall (u,v,\varphi) \in K_2, w \in W_1$:

$h_1([u \square w], [v \square w], [\varphi \square 1]) = h_1(s_{3,w}(u,v,\varphi)) = g_{3,w}((u,v,\varphi), h_1(u,v,\varphi))$

$\forall (u,v,\varphi) \in K_1, w \in W_2$:

$h_1([w \square u], [w \square v], [1 \square \varphi]) = h_1(s_{4,w}(u,v,\varphi)) = g_{4,w}((u,v,\varphi), h_1(u,v,\varphi))$

$\forall (u,v,\varphi) \in K_3, w \in W_1$:

$h_1([u \square w], [v \square w], [\varphi \square 1]) = h(s_{5,w}(u,v,\varphi)) = g_{5,w}((u,v,\varphi), h_1(u,v,\varphi))$

$h_1(u,v,\varphi) := (h(u),h(v),\varphi)$ erfüllt die vorigen Bedingungen, da:

$\forall (u,v,\varphi)\varepsilon K_1, w\varepsilon W_1$:

$h_1([u\square w],[v\square w],[\varphi\square 1]) = (h([u\square w]),h([v\square w]),\varphi\otimes 1) = (u_B \otimes w_B, v_B \otimes w_B, \varphi\otimes 1)$

$= g_{1,w}((u,v,\varphi),(u_B,v_B,\varphi)) = g_{1,w}((u,v,\varphi),h_1(u,v,\varphi))$. Rest analog.

Ausserdem, für alle $(u,v,\varphi)\varepsilon K_1 \cup K_2 \cup K_3 : h_1(u,v,\varphi) \neq \{\infty\}$

Man bemerkt dass, wir denselben Buchstaben "φ" für zwei verschiedene Begriffe benutzen, die formal gebildete Pfeilkante in K (z.B. α) und den nat. Morphismus in $\mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{T}$.

Also hat man auch:

$\forall (u,v,\varphi)\varepsilon K_1, w\varepsilon W_1$:

$h_1([w\square u], [w\square v], [1\square\varphi]) = (w_B \otimes u_B, w_B \otimes v_B, 1\otimes\varphi)$

$\forall (u,v,\varphi)\varepsilon K_2, w\varepsilon W_1$:

$h_1([u\square w], [v\square w], [\varphi\square 1]) = (u_X \otimes w_B, v_X \otimes w_B, \varphi\otimes 1)$

$\forall (u,v,\varphi)\varepsilon K_1, w\varepsilon W_2$:

$h_1([w\square u], [w\square v], [1\square\varphi]) = (w_X \otimes u_B, w_X \otimes v_B, 1\otimes\varphi)$

$\forall (u,v,\varphi)\varepsilon K_3, w\varepsilon W_1$:

$h_1([u\square w], [v\square w], [\varphi\square 1]) = (u_X \otimes w_B, v_X \otimes w_B, \varphi\otimes 1)$

Wir haben gesehen, wie man die Worte und die Kanten abbildet. Ein Weg ist wie in 1.15 definiert: Eine Folge von Kanten, also ist es klar, wie das Bild eines Weges ausschaut: Es ist die Komposition der Bilder der Kanten.

Das Bild eines Weges, der aus der Kanten $(u,x_1,\varphi_1),(x_1,x_2,\varphi_2),\ldots,$

(x_n,v,φ_{n+1}) besteht, wobei $u,x_1,\ldots,x_n\varepsilon W_1$ ist:

$$u_B \xrightarrow{\varphi_1} x_{1B} \xrightarrow{\varphi_2} x_{2B} \longrightarrow \cdots \longrightarrow x_{nB} \xrightarrow{\varphi_{n+1}} v_B$$

Wenn $u,x_1,\ldots,x_n\varepsilon W_2$, ist das Bild:

$$u_X \xrightarrow{\varphi_1} x_{1X} \xrightarrow{\varphi_2} x_{2X} \longrightarrow \cdots \longrightarrow x_{nX} \xrightarrow{\varphi_{n+1}} v_X$$

Jetzt kommen wir zu einem wesentlichen Satz: Zwei Kanten aus $K(\alpha,\beta,\lambda,\rho,\sigma)$ seien gegeben, die eine gemeinsame erste Komponente haben. Wir zeigen, dass eine von drei Möglichkeiten gilt:

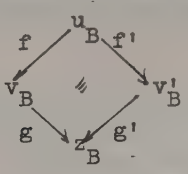
1.) Eine Kante existiert, die mit der ersten zwei Kanten ein Dreieck, mit kommutativem Bild, bildet.

2.) Zwei weitere Kanten existieren, also ein Diagramm von vier Ecken, dessen Bild kommutativ ist.

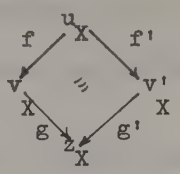
3.) Drei weitere Kanten, d.h. ein Diagramm von fünf Ecken, dessen Bild auch kommutiert.

1.17 **Satz**: $\forall (u,v,f),(u,v',f') \varepsilon K(\alpha,\lambda,\rho,\beta,\sigma), v \neq v'$

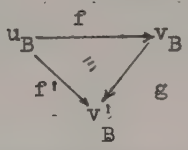
a) $\exists (v,z,g),(v',z,g') \varepsilon K(\alpha,\lambda,\rho,\beta,\sigma)$ mit:



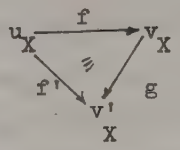
oder



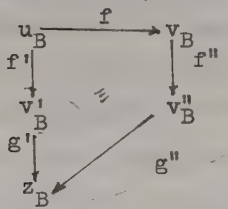
Oder b) $\exists (v,v',g) \varepsilon K(\lambda,\rho,\sigma)$ mit:

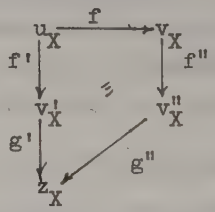


oder



Oder c) $\exists (v',z,g'),(v,v'',f''),(v'',z,g'') \varepsilon K(\alpha,\beta)$, mit:





(evtl. müssen in b) bzw. c) die Rollen von f und f' vertauscht werden!)

Beweis: durch Induktion nach $\#_{\sigma}(u)$.

Induktionsanfang: $\#_{\sigma}(u)=0 \Rightarrow u=e_0 \vee u= - \vee u= \sim \Rightarrow$ es existiert kein f $\Rightarrow$ Behauptung

Induktionsannahme: Behauptung richtig für $\#_{\sigma}(u)=n$

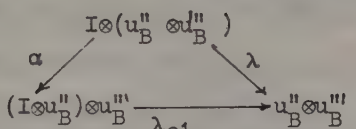
Induktionsschluss: $\#_{\sigma}(u)=n+1, n \geq 0$: Wir untersuchen alle Möglichkeiten:

1.) $f=\alpha, f'=\alpha \Rightarrow v=v'$

2.) $f=\alpha, f'=\lambda$: Da α "anwendbar" auf u ist, muss u von der Form:

$u=[u' \sqcup [u'' \sqcup u''']]$, aber λ ist auch auf u anwendbar, also ist

$u=[e_o \square[u'' \square u''']]$.Das Bild des Diagramms kommutiert nach [9]

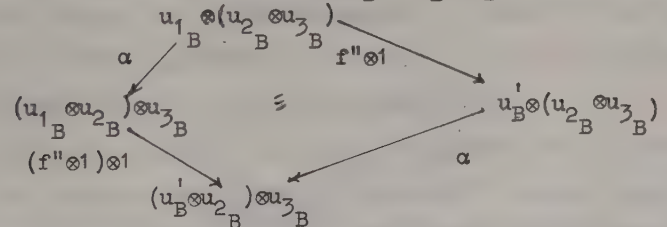


3.) $f=\alpha$, $f'=\rho$: Wegen α muss $u=[u' \square[u'' \square u''']]$,aber andererseits $f'=\rho$, also gilt auch die Form $u=[u_1 \square e_o] \Rightarrow$(nach 1.11) $u'=u_1 \wedge [u'' \square u'''] = e_o$: Widerspruch zu: e_o ein Element der Familie $\hat{X}$, $(W,S,\hat{X})$ Peano-Algebra.Also kann dieser Fall nicht auftreten .

4.) $f=\alpha, f'=\beta$:Wegen α:$u=[u' \square[u'' \square u''']]$,wobei $u',u'',u''' \in W_1$,wegen β: $u=[u_1 \square[u_2 \square u_3]], u_1 \in W_2, u_2, u_3 \in W_1$:Widerspruch zu $W_1 \cap W_2 = \phi$, d.h.dieser Fall kann nicht auftreten

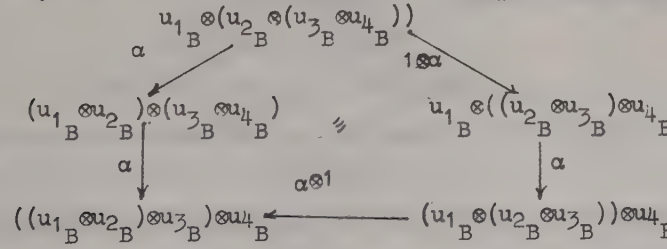
5.) $f=\alpha, f'=\sigma$ .Wegen α:$u \in W_1$,wegenσ :$u \in W_2$:auch Widerspruch zu $W_1 \cap W_2 = \phi$.d.h.es kann nicht auftreten.

6.) $f=\alpha, f'=f'' \square 1$:Wegen α ist $u_B=u_{1_B} \otimes (u_{2_B} \otimes u_{3_B})$,wir haben:



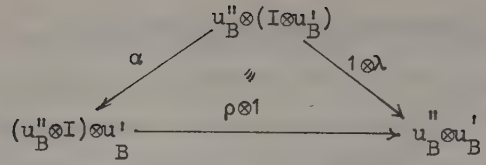
Da α natürliche Transformation ist,kommutiert das obigen Bild.

7.) $f=\alpha, f'=1 \square f'', f''=\alpha$:Es ist klar,dass $u_B=u_{1_B} \otimes (u_{2_B} \otimes (u_{3_B} \otimes u_{4_B}))$.Also



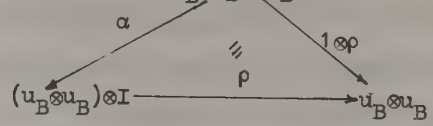
Das Bild kommutiert nach Voraussetzung($\mathcal{C}$ ist eine monoidale Kategorie

8.) $f=\alpha, f'=1 \square f'', f''=\lambda$:Es ist klar,dass $u_B=u''_B \otimes (I \otimes u'_B)$.



Das Bild kommutiert, da $\mathfrak{C}$ eine monoidale Kategorie ist.

9.) $f=\alpha, f'=1\square f'', f''=\rho$: $u_B=u'_B\otimes(u''_B\otimes I)$

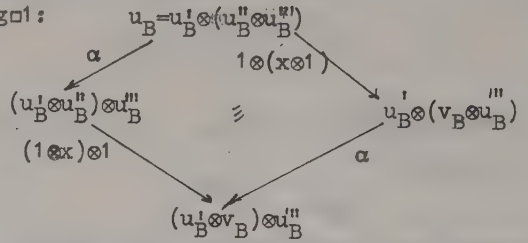


Auch hier folgt Kommutativität nach Voraussetzung. ($\mathfrak{C}$ ist monoidale Kategorie)

10.) $f=\alpha, f'=1\square f'', f''=\beta$: Es kann nicht auftreten, da die Pfeilkante $1\square\beta$ nicht definiert ist.

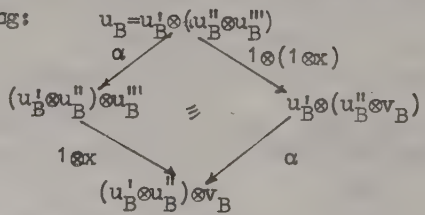
11.) $f=\alpha, f'=1\square f'', f''=\sigma$: Hier ist die Pfeilkante $1\square\sigma$ nicht definiert, d.h. der Fall tritt nicht auf.

12.) $f=\alpha, f'=1\square f'', f''=g\square 1$:



Das Diagramm kommutiert, da α natürliche Transformation in $\mathfrak{C}$ ist.

13.) $f=\alpha, f'=1\square f'', f''=1\square g$:



Genau wie beim 12.), kommutiert das Diagramm, da α natürliche Transformat in $\mathfrak{C}$ ist.

14.) $f=\lambda, f'=\lambda \Rightarrow v=v'$

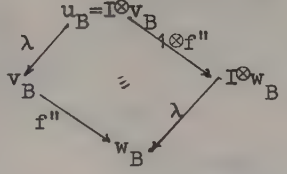
15.) $f=\lambda, f'=\rho \Rightarrow u=[e_o\square e_o]=v=v'$

16.) $f=\lambda, f'=\beta$,wegen $\beta: u_B = u_{1_B} \otimes (u_{2_B} \otimes u_{3_B})$,wegen $\lambda: u_{1_B} = I$,aber $e_o \notin W_2$,also kann dieser Fall nicht auftreten.

17.) $f=\lambda, f'=\sigma$,wegen $\lambda: u_B = I \otimes v_B$,aber $e_o \notin W_2$,d.h.kann nicht auftreten.

18.) $f=\lambda, f'=f''\square 1$: wegen$\lambda, u=[e_o \square u']$,wegen $f''\square 1$ existiert eine Kante mit der ersten Komponente e_o,mit einer Pfeilkante f",aber solche Kante ist überhaupt nicht definiert.Also kann dies Fall nicht auftreten.

19.) $f=\rho, f'= 1\square f''$:



Das Diagramm kommutiert,da λnatürliche Transformation in $\mathbb{C}$ ist.

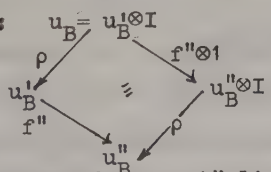
20.) $f=\rho, f'=\rho \Rightarrow v=v'$.

21.) $f=\rho, f'=\beta$:Wegen$\rho: u \varepsilon W_1$ und wegen $\beta: u \varepsilon W_2$ .Widerspruch zu $W_1 \cap W_2 = \phi$. Also kann dieser Fall nicht auftreten.

22.) $f=\rho, f'=\sigma$:Wegen ρ ist $u \varepsilon W_1$,und wegen σ ist $u \varepsilon W_1$.Widerspruch zu $W_1 \cap W_2 = \phi$.Also kann er nicht auftreten.

23.) $f=\rho, f'=1\square f''$:Wegen ρ ist $u=[u' \square e_o]$,wegen $1\square f''$ existiert eine Kante mit ersten Komponente e_o,Pfeilkante f".Solche Kante ist überhaupt nicht definiert.Der Fall kann nicht auftreten.

24.) $f=\rho, f'=f''\square 1$:

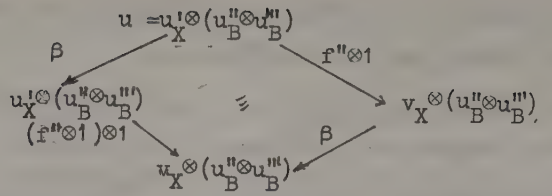


Das Diagramm kommutiert,da ρ natürliche Transformation in $\mathbb{C}$ ist.

25.)$f=\beta, f'=\beta$: $\Rightarrow v=v'$.

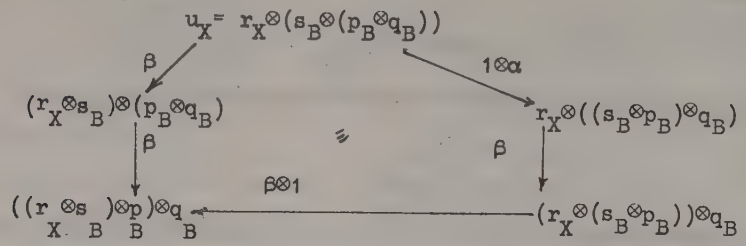
26.)$f=\beta, f'=\sigma$: Wegen β ,$u=[u' \square [u'' \square u''']]$,$u' \varepsilon W_2$,$u''$,$u''' \varepsilon W_1$.Wegen σ $u=[u_1 \square e_o]$,$u_1 \varepsilon W_2$.$\Rightarrow$(nach Satz 1.11)$u'=u_1 \wedge [u'' \square u'''] = e_o$:Widerspruch zu e_o Element der Familie $\hat{X}$,$(X,S,\hat{X})$ ist Peano-Algebra.

27.)$f=\beta, f'=f''\square 1$:



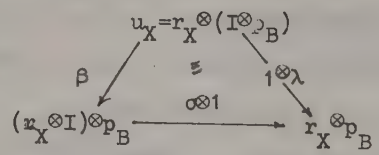
Das Diagramm Kommutiert, da β natürliche Transformation in $\mathfrak{M}$ ist.

28.) $f=\beta, f'=1 \square f'', f''=\alpha$



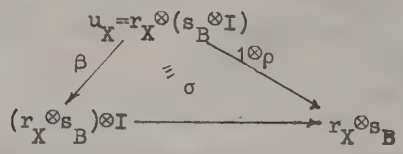
Das Diagramm kommutiert, da $\mathfrak{M}$ eine $\mathfrak{C}$ -Kategorie ist.

29.) $f=\beta, f'=1 \square f'', f''=\lambda$



Das Diagramm kommutiert, da $\mathfrak{M}$ eine $\mathfrak{C}$-Kategorie ist, und nach Definition solche Diagramme in $\mathfrak{C}$-Kategorien kmmutieren.

30.) $f=\beta, f'=1 \square f'', f''=\rho$

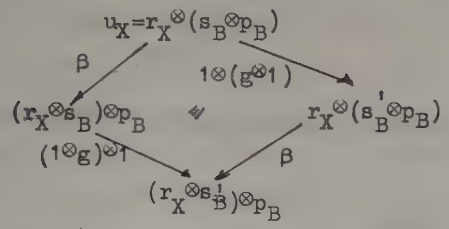


Kommutativität folgt nach Definition einer $\mathfrak{C}$ -Kategorie.

31.) $f=\beta$, $f'=1 \square f''$, $f''=\beta$: Wieder wie bei 10.) die Pfeilkante $1 \square \beta$ ist nicht definiert, also kann nicht auftreten.

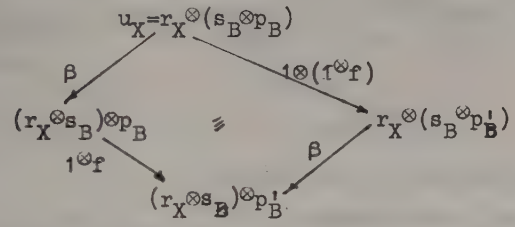
32.) $f=\beta$, $f'=1 \square f''$, $f''=\sigma$: Hier wie beim Fall 11.) die Pfeilkante $1 \square \sigma$ ist nicht definiert, also kann nicht auftreten.

33.) $f=\beta, f'=1\square f'', f''=g\square 1$



Das Diagramm kommutiert, da β natürliche Transformation in $\mathfrak{R}$ ist.

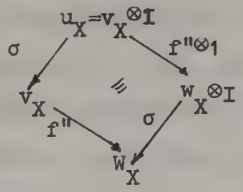
34.) $f=\beta$, $f'=1\square f''$, $f''=1\square g$



Kommutativität wie beim 33.)

35.) $f=\sigma, f'=\sigma \Rightarrow v=v'$

36.) $f=\sigma$, $f'=f''\square 1$:

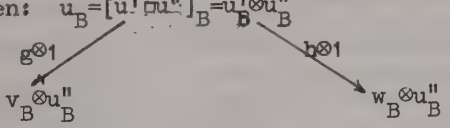


Das Diagramm kommutiert, da σ natürliche Transformation in $\mathfrak{R}$ ist.

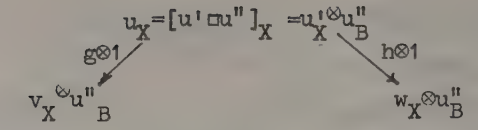
37.) $f=\sigma, f'=1\square f''$: Wegen σ: $u=[v\square e_o]$, wobei $v\in W_2$, aber wegen $1\square f''$ existiert eine Kante mit ersten Komponente e_o und Pfeilkante f''. Solche Kante ist nicht definiert. Der Fall kann nicht auftreten.

38.) $f=g\square 1$, $f'=h\square 1$:

Wir haben: $u_B=[u'\square u'']_B=u_B'\otimes u_B''$



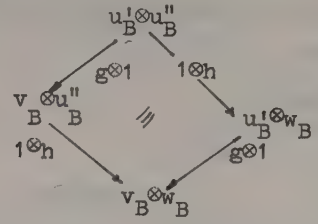
oder:



Behauptung folgt nach Induktionsannahme, da $\#_a([u'\square u''])> \#_a(u')+1$

39.) $f=g\square 1$, $f'=1\square h$:

Falls $u\varepsilon W_1$: $u_B=u'_B\otimes u''_B$, wir haben:



Das Diagramm kommutiert, da "$\otimes$" Bifunktor ist.

Falls $u\varepsilon W_2$: $u = u'_X\otimes u''_B$: ganz analog.

40.) $f=1\square g$, $f'=1\square h$: genau wie bei 38.). Also die Behauptung.

Bemerkung: Wenn es nicht missverständlich ist, schreiben wir die Pfeilkanten ohne Klammern, z.B. $1\square g$ statt $[1\square g]$

Wir zeigen beim nächsten Lemma folgendes: Gegeben sei ein Wort $w\varepsilon W_1$, $\#_{e_o}(w)\geq 1$, dann kann man immer alle die e_o "eliminieren" und man erhält ein Wort $w'\varepsilon W_1$, wobei $\#_{e_o}(w')=0$. Also existiert ein Weg von w nach w', wobei alle Kanten aus $K(\alpha,\lambda,\rho)$ sind. Falls das Wort aus W_2 ist, sind die Kanten aus $K(\beta,\sigma)$.

1.18 Lemma: i) Gegeben sei $w\varepsilon W_1$, $\#_{e_o}(w)\geq 1$, $\#_-(w)\geq 1$, dann existiert $w'\varepsilon W_1$, $\#_{e_o}(w')=0$ und ein Weg von w nach w', mit Kanten aus $K(\lambda,\rho)$.

ii) Gegeben sei $w\varepsilon W_2$, $\#_{e_o}(w)\geq 1$, dann existieren $w'\varepsilon W_2$, $\#_{e_o}(w')=0$, und ein Weg von w nach w', mit Kanten aus $K(\lambda,\rho,\sigma)$

Beweis: i) durch Induktion nach $\#_a(w)$:

Induktionsanfang: $\#_a(w)=0 \Rightarrow w=- \vee w=e_o \Rightarrow$ Behauptung.

Induktionsannahme: Sei Behauptung richtig für $\#_a(w)\leq n$.

Induktionsschluss: $\#_a(w)=n+1, n\geq 0 \Rightarrow w=[u\square v]$. Da $\#_a(u) < \#_a(w) > \#_a(v)$, folgt es nach Induktionsannahme, wobei $\#_a(u) >0 \wedge \#_a(v) >0$:

$\exists\, u' \varepsilon W_1, \#_{e_0}(u')=0$ ein Weg von u nach u': $(u,u_1,f_1),(u_1,u_2,f_2),\ldots,$ (u_i,u',f') ,mit Kanten aus $K(\lambda,\rho)$, $\exists v' \varepsilon W_1, \#_{e_0}(v')=0$, ein Weg von v nach v'; $(v,v_1,g_1),(v_1,v_2,g_2),\ldots,(v_j,v',g')$,mit Kanten aus $K(\lambda,\rho)$. Also konstruieren wir von $w=[u \square v]$ nach $w'=[u' \square v']$,wobei $\#_{e_0}(w')=0$, den Weg: $([u\square v],[u_1\square v],[f_1\square 1]),([u_1\square v],[u_2\square v],[f_2\square 1]),\ldots,$ $([u_i\square v],[u'\square v],[f'\square 1]),([u'\square v],[u'\square v_1],[1\square g_1]),([u'\square v_1],[u'\square v_2],[1\square g_2]),$ $\ldots,([u'\square v_j],[u'\square v'],[1\square g'])$,mit Kanten aus $K(\lambda,\rho) \Rightarrow$ Behauptung. (Der Fall $\#_{e_0}(u)=0 \vee \#_{e_0}(v)=0$ ist klar.) ii) analog zu i)

1.19 Definition : Standardwort $w'^{(n)}, w^{(n)}$:Wir definieren das Wort $w'^{(n)}$ rekursiv:

$w'^{(1)}= -,$

$w'^{(2)}=[w'^{(1)}\square -],$

$w'^{(n)}=[w'^{(n-1)}\square -]$

Jedem Wort $w \varepsilon W_1$ ordnen wir $w'^{(\#_{e_0}(w))}$ zu.Das ist eine Abbildung $w \longrightarrow w'^{(\#_{e_0}(w))}$ (Wohldefiniertheit:klar)

Wir definieren $w^{(n)}$ rekursiv:

$w^{(1)}= \sim,$

$w^{(2)}=[w^{(1)}\square -],$

$w^{(n)}=[w^{(n-1)}\square -]$

Analog,jedem Wort $w \varepsilon W_2$ ordnen wir $w^{(\#_{e_0}(w)+1)}$,auch eine Abbildung $w \longrightarrow w^{(\#_{e_0}(w)+1)}$,wohldefiniert.

In ungenauen Worten sind Standardworte die Worte $w'^{(n)}$ (bzw. $w^{(n)}$) aus W_1 (bzw. W_2)wobei $\#_{e_0}(w'^{(n)})=0$ (bzw. $\#_{e_0}(w^{(n)})=0$)und alle Klammern vorne anfangen.

Bemerkung:Falls ein Weg von einem Wort "u"zum anderem Wort"v" existiert, dann haben die beiden Worte dasselbe Standardwort.Die Kanten sind natürlich aus $K(\alpha,\lambda,\rho,\beta,\sigma)$.Das folgt unmittelbar aus die Tatsache dass:$\#_{e_0}(u)=\#_{e_0}(v)$,was man direkt durch Induktion nach der Anzahl der

Kanten beweisen kann.

Wir zeigen jetzt, dass ein Weg zwischen einem Wort, das kein Standardwort ist, w mit $\#_{e_0}(w)=0$, und seinem Standardwort immer existiert. Die Kanten sind aus $K(\alpha)$, falls $w \in W_1$ ist, und aus $K(\alpha,\beta)$, falls $w \in W_2$

1.20 Lemma: Von $u \in W_2$ (bzw. $u \in W_1$) nach $w^{(\#(u)+1)}$ (bzw. $w'^{(\#(u))}$) existiert mindestens ein Weg mit Kanten aus $K(\alpha,\beta)$ (bzw. aus $K(\alpha)$), wobei $\#_{e_0}(u)=0, u \neq w^{(\#(u)+1)}$ (bzw. $u \neq w'^{(\#(u))}$)

Beweis: durch Induktion nach $\#(u)$.

Induktionsanfang: $\#(u)=0 \Rightarrow$ Es gibt kein Wort u

Induktionsannahme: Sei Behauptung richtig für $\#(u) \leq n$.

Induktionsschluss: $u \in W_2, \#(u)=n+1$. Man setze $u=[u_1 \square u_2], \#(u_1)=m$, $1 \leq m \leq n, \#(u_2)=n-m+1$.

Falls $m \neq n$: Nach Induktionsannahme existieren Wege von u_1 nach $w^{(m+1)}$ und von u_2 nach $w'^{(n-m+1)}$, deren Kanten sind:

$(u_1,v_1,\varphi_1),(v_1,v_2,\varphi_2),\ldots,(v_{t-1},w^{(m+1)},\varphi_t)$ $K(\alpha,\beta)$ und (u_2,w_1,ψ_1), $(w_1,w_2,\psi_2),\ldots,(w_{s-1},w'^{(n-m+1)},\psi_s)$ $K(\alpha) \Rightarrow$ ∃ ein Weg mit Kanten aus $K(\alpha,\beta)$ von $[u_1 \square u_2]$ nach $[w^{(m+1)} \square w'^{(n-m+1)}] = [w^{(m+1)} \square [w'^{(n-m)} \square -]]$, dessen Kanten sind:

$([u_1 \square u_2],[v_1 \square u_2],[\varphi_1 \square 1]\ ,([v_1 \square u_2],[v_2 \square u_2],[\varphi_2 \square 1]),\ldots,$

$([v_{t-1} \square u_2],[w^{(m+1)} \square u_2],[\varphi_t \square 1]),([w^{(m+1)} \square u_2],[w^{(m+1)} \square w_1],[1 \square \psi_1]),$

$([w^{(m+1)} \square w_1],[w^{(m+1)} \square w_2],[1 \square \psi_2]),\ldots,$

$([w^{(m+1)} \square w_{s-1}],[w^{(m+1)} \square w'^{(n-m+1)}],[1 \square \psi_s])$

Jetzt verwende man β, dann erhält man $[[w^{(m+1)} \square w'^{(n-m)}] \square -]$. Nach Induktionsannahme existiert wieder ein Weg mit Kanten aus $K(\alpha,\beta)$ von $[w^{(m+1)} \square w'^{(n-m)}]$ nach $w^{(n+1)}$, also von $[[w^{(m+1)} \square w'^{(n-m)}] \square -]$ nach $w^{(n+2)}$.

Falls $m=n$: $\Rightarrow u_2=-$

Nach Induktionsannahme existiert ein Weg von u_1 nach $w^{(m+1)}$, also von $u=[u_1 \square u_2]$nach$[\ w^{(m+1)}\square-] = w^{(m+2)} = w^{(n+2)} = (\#(u)+1)$ $\Rightarrow$ Behauptung.

Für $u\varepsilon W_1$ verfahre man ganz analog mit α statt β .

Die Lemmas 1.18 und 1.20 bringen unmittelbar den folgenden Satz hervor:

1.21 Satz: Es gibt einen Weg mit Kanten aus $K(\alpha,\lambda,\rho,\beta,\sigma)$ (bzw. aus $K(\alpha,\lambda,\rho)$) von u nach $w^{(n+1)}$ (bzw. nach $w'^{(n)}$), wobei $u\varepsilon W_2$ (bzw. $u\varepsilon W_1$), $\#(u)=n>0$, $u\neq w^{(n+1)}$ (bzw. $u\neq w'^{(n)}$)

1.22 Bemerkung: $u\varepsilon W_1 \cup W_2$, $\#_\square(u)\geq 1 \Rightarrow Rg(u)>0$.

Beweis: durch Induktion nach $\#_\square(u)$:

Induktionsanfang: $\#_\square(u)=1 \Rightarrow u=[\sim\square e_o]$ V $u=[\sim\square-]$ V $u=[-\square-]$
V $u=[-\square e_o]$ V $u=[e_o\square-]$V $u=[e_o\square e_o]$

In allen Fällen : $Rg(u)=0+0+0+1=1$

Induktionsannahme: Sei Behauptung richtig für $\#_\square(u)<n$

Induktionsschluss: $\#_\square(u)=n+1 \Rightarrow u=[u_1\square u_2]$

$Rg(u) = Rg(u_1)+Rg(u_2)+\#_\square(u_2)+1 \geq 1 \Rightarrow$ Behauptung.

Jetzt können wir den folgenden wesentlichen Satz beweisen:

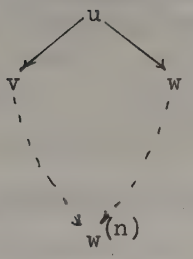
1.23 Satz: Je zwei Wege von $u\varepsilon W_2$ (bzw. $u\varepsilon W_1$), $\#(u)=n>0$, nach $w^{(n+1)}$ (bzw. $w'^{(n)}$), mit Kanten aus $K(\alpha,\lambda,\rho,\beta,\sigma)$ (bzw. $K(\alpha,\lambda,\rho)$) haben gleiche Bilder.

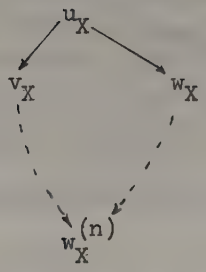
Beweis: Sei $u\varepsilon W_2$. Falls $u\varepsilon W_1$ verläuft der Beweis analog. Wir führen den Beweis mit Induktion nach Rg(u).

Induktionsanfang: $Rg(u)=0 \Rightarrow$(nach Bemerkung 1.22) $u=\sim \Rightarrow$ Es gibt keinen Weg $\Rightarrow$ Behauptung.

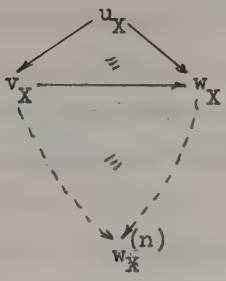
Induktionsannahme: Sei Behauptung richtig für $Rg(u)<n$.

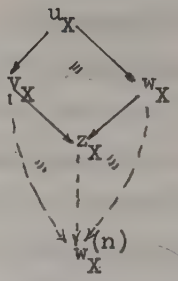
Induktionsschluss: $Rg(u)=n+1$: Seien wie im Diagramm zwei Wege von u nach $w^{(n)}$ gegeben:

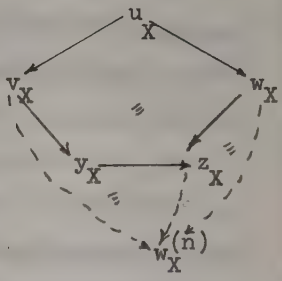




Nach Satz 1.17 bekommen wir eines von den folgenden kommutativen Diagrammen: $u_X\ v_X\ w_X$ oder $u_X\ v_X\ z_X\ w_X$ oder $u_X\ v_X\ y_X\ z_X\ w_X$







Solche Wege mit punktierten Linien existieren nach Satz 1.21, die Diagramme kommutieren nach Induktionsannahme: Da nach Satz 1.14 $Rg(v)$ und $Rg(w) \leq n \Rightarrow$ Behauptung.

Jetzt kommen wir zu unserem Hauptsatz dieses Paragraphen:

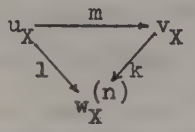
1.24 Hauptsatz: Seien P,Q Objekte von $\mathfrak{M}$, die als Tensorprodukte von $X \in Ob(\mathfrak{M})$, je n Kopien von $B \in Ob(\mathfrak{C})$ und weiteren Kopien von I dargestellt sind, genauer: Seien $P=u_X$, $Q=v_X$ Bilder von zwei Worten $u,v \in W_2$ bei Einsetzen von X,B mit $\#_-(u)=\#_-(v)=n$. Dann gibt es genau einen Morphismus $\varphi: P \longrightarrow Q$, der sich aus Morphismen zusammensetzt, die sich als Tensorprodukte von $\alpha, \lambda, \rho, \beta, \sigma, \bar{\alpha}, \bar{\lambda}, \bar{\rho}, \bar{\beta}, \bar{\sigma}$ und Identität darstellen lassen, genauer: so dass $\varphi: P \longrightarrow Q$ Bild eines Weges von u nach v bei Einsetzen von X und B ist. ($\mathfrak{M}, \mathfrak{C}$ wie früher definiert.) Eine analoge Aussage gilt, falls $P,Q \in \mathfrak{C}$.

($\mathbb{C}$ ist eine monoidale Kategorie, und $\mathbb{T}$ ist eine $\mathbb{C}$-Kategorie)

Beweis: durch Induktion nach Anzahl der Kanten des Weges von u nach v.

Induktionsanfang: Anzahl der Pfeilkanten=1

Wir zeigen zunächst, dass das folgende Diagramm kommutiert:



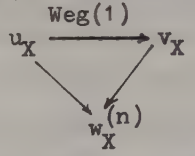
wobei $u,v \in W_2$, $\bar{m}^1 \in K(\alpha,\lambda,\rho,\beta,\sigma)$, l (bzw. k) Bild einer Folge von Pfeilkanten $K(\alpha,\lambda,\rho,\beta,\sigma)$ von u (bzw. v) nach $w^{(n)}$.

Nach Satz 1.23 folgt $l\bar{m}^1=k \Rightarrow$ (da m natürliche Transformation ist) $l=km$. Jetzt seien m_1, m_2 zwei Pfeilkanten von u nach v $\Rightarrow km_1=l=km_2$ $\Rightarrow$ (da k Isomorphismus ist) $m_1=m_2$.

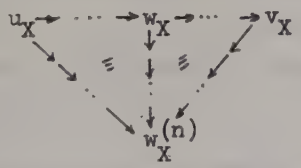
Induktionsannahme: Sei Behauptung richtig für den Fall: Anzahl der Pfeilkanten eines Weges $\leq n$.

Induktionsschluss: Anzahl der Pfeilkanten = n+1.

Wir zeigen wieder, dass das folgende Diagramm kommutiert, wobei Anzahl der Pfeilkanten von u nach v =n+1 auf dem Weg(1).



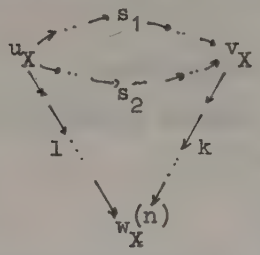
Es existiert ein Wort w "zwischen" u und v, wobei die Anzahl der Pfeilkanten eines Weges von u nach w $\leq n$ und die Anzahl der Pfeilkanten von w nach v $\leq n$ (alles auf dem Weg (1))



Da die Bilder aller Pfeilkanten in Diagrammen Isomorphismen sind, folgt nach Annahme, dass: $u_X\ w_X\ w_X^{(n)}$ und $w_X\ v_X\ w_X^{(n)}$ kommutieren $\Rightarrow$ Diagramm $u_X\ v_X\ w_X^{(n)}$ kommutiert.

Jetzt seien s_1 und s_2 Bilder zweier Folgen von Pfeilkanten, mit

Anzahl der Pfeilkanten=n+1, von u nach v



k und l wie beim Induktionsanfang $\Rightarrow ks_1 = l = ks_2$ $\Rightarrow$(da k Isomorphismus ist) $s_1 = s_2$ $\Rightarrow$ Behauptung.

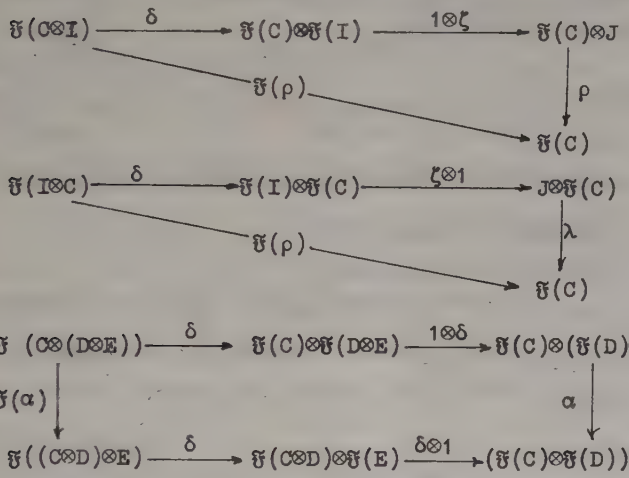
§2 Kohärenz der monoidalen Funktoren

Seien $(\mathfrak{C},\otimes,I),(\mathfrak{D},\otimes,J)$ zwei monoidale Kategorien. Ein Funktor $\mathfrak{F}:\mathfrak{C}\longrightarrow\mathfrak{D}$ heisst monoidal (nach [12]) genau dann wenn:

$\forall\ C,D\in Ob(\mathfrak{C})\ \exists\delta,\zeta$ funktorielle Isomorphismen,

$\delta:\mathfrak{F}(C\otimes D)\cong\mathfrak{F}(C)\otimes\mathfrak{F}(D),\ \zeta:\mathfrak{F}(I)\cong J,$

so dass die folgenden Diagramme kommutieren:



Hier in einer ähnlichen Situation wie im ersten Abschnitt, zeigen wir, dass die obigen Voraussetzungen "Kohärenzbedingungen" sind, das heisst wieder, dass "alle Diagramme kommutieren". Wir folgen demselben Schema wie in §1.

2.1 **Definition**: Sei $M:=\{[,],\square,e_o,-,e_1,\sim,f\}$

$Z:=\{\emptyset\}\cup M\cup M^2\cup\ldots$ (Menge der Zeichenreihen mit Buchstaben aus M).

Sei W_1 die kleinste Teilmenge von Z, so dass:

i) $e_o\varepsilon W_1\wedge -\varepsilon W_1$

ii) $u\varepsilon W_1\wedge v\varepsilon W_1\Rightarrow[u\square v]\varepsilon W_1$

W_1 heisst die Menge aller Worte bzgl. $\mathfrak{C}$

Sei W_2 die kleinste Teilmenge von Z, so dass:

i') $e_1 \varepsilon W_2 \wedge \sim e \varepsilon W_2$

ii') $w \varepsilon W_1 \Rightarrow f[w] \varepsilon W_2$

iii') $u \varepsilon W_2 \wedge v \varepsilon W_2 \Rightarrow [u \square v] \varepsilon W_2$

W_2 heisst die Menge aller Worte bzgl. $\mathcal{D}$

Existenz von W_2: W_2 ist der Durchschnitt aller Teilmengen von Z, die die Bedingungen i'),ii'),iii') erfüllen, nicht leer wegen i').

2.2 Definition: Seien

$T := \{[,], \square, 1, \alpha, \lambda, \rho, \delta, \zeta, f, \bar{\alpha}^1, \bar{\lambda}^1, \bar{\rho}^1, \bar{\delta}^1, \bar{\zeta}^1\}$

$Y := \{\phi\} \cup T \cup T^2 \cup \ldots$ (Menge der Zeichenreihen mit Buchstaben aus T).

$k_\alpha := \{([u \square [v \square w]], [[u \square v] \square w], \alpha) \mid u, v, w \varepsilon W_1\}$

$l_\alpha := \{([u \square [v \square w]], [[u \square v] \square w], \alpha) \mid u, v, w \varepsilon W_2\}$

$k_\lambda := \{([e_o \square u], u, \lambda) \mid u \varepsilon W_1\}$

$l_\lambda := \{([e_1 \square u], u, \lambda) \mid u \varepsilon W_2\}$

$k_\rho := \{([u \square e_o], u, \rho) \mid u \varepsilon W_1\}$

$l_\rho := \{([u \square e_1], u, \rho) \mid u \varepsilon W_2\}$

$l_\delta := \{(f[u \square v], [f[u] \square f[v]], \delta) \mid u, v \varepsilon W_1\}$

$l_\zeta := \{(f[e_o], e_1, \zeta)\}$

$k_{\bar{\alpha}^1} := \{([[u \square v] \square w], [u \square [v \square w]], \bar{\alpha}^1) \mid u, v, w \varepsilon W_1\}$

$l_{\bar{\alpha}^1} := \{([[u \square v] \square w], [u \square [v \square w]], \bar{\alpha}^1) \mid u, v, w \varepsilon W_2\}$

$k_{\bar{\lambda}^1} := \{(u, [e_o \square u], \bar{\lambda}^1) \mid u \varepsilon W_1\}$

$l_{\bar{\lambda}^1} := \{(u, [e_1 \square u], \bar{\lambda}^1) \mid u \varepsilon W_2\}$

$k_{\bar{\rho}^1} := \{(u, [u \square e_o], \bar{\rho}^1) \mid u \varepsilon W_1\}$

$l_{\bar{\rho}^1} := \{(u, [u \square e_1], \bar{\rho}^1) \mid u \varepsilon W_2\}$

$l_{\bar{\delta}^1} := \{([f[u] \square f[v]], f[u \square v], \bar{\delta}^1) \mid u, v \varepsilon W_1\}$

$l_{\bar{\zeta}^1} := \{(e_1, f[e_o], \bar{\zeta}^1)\}$

Seien $\psi_i \varepsilon \{\alpha, \lambda, \rho, \bar{\alpha}^1, \bar{\lambda}^1, \bar{\rho}^1\}$, $i \varepsilon N$,

$\varphi_j \varepsilon \{\delta, \zeta, \bar{\delta}^1, \bar{\zeta}^1\}$, $j \varepsilon N$

$K(k_{\psi_i})$ sei die kleinste Teilmenge von $W_1 \times W_1 \times Y_1$, die k_{ψ_i} enthält mit:

$(u,v,\varphi)\varepsilon K(k_{\psi_i}) \Rightarrow \forall w\varepsilon W_1 : ([u\square w],[v\square w],[\varphi\square 1]) \varepsilon K(k_{\psi_i}) \wedge$

$([w\square u],[w\square v],[1\square\varphi])\varepsilon K(k_{\psi_i})$

$K(l_{\psi_i})$ sei die kleinste Teilmenge von $W_2 \times W_2 \times Y$, die l_{ψ_i} enthält mit:

$(u,v,\varphi)\varepsilon K(l_{\psi_i}) \Rightarrow \forall w\varepsilon W_2 : ([u\square w],[v\square w],[\varphi\square 1])\varepsilon K(l_{\psi_i}) \wedge$

$([w\square u],[w\square v],[1\square\varphi])\varepsilon K(l_{\psi_i})$,

$(u,v,\varphi)\varepsilon K(k_{\psi_i}) \Rightarrow (f[u],f[v],f[\varphi]) \varepsilon K(l_{\psi_i})$

$K(l_{\varphi_j})$ sei die kleinste Teilmenge von $W_2 \times W_2 \times Y$, die l_{φ_j} enthält mit:

$(u,v,\varphi)\varepsilon K(l_{\varphi_j}) \Rightarrow \forall w\varepsilon W_2 : ([u\square w],[v\square w],[\varphi\square 1])\varepsilon K(l_{\varphi_j})$

$([w\square u],[w\square v],[1\square\varphi])\varepsilon K(l_{\varphi_j})$

Existenz von $K(k_{\psi_i}), K(l_{\psi_i}), K(l_{\varphi_j})$: klar.

Eine <u>Kante</u> ist ein Element in $K(k_{\psi_i})$ oder in $K(l_{\psi_i})$ oder in $K(l_{\varphi_j})$, Das ist ein Tripel, die dritte Komponente in diesem Tripel heisst Pfeilkante.

Sei $K(\psi_i) := K(k_{\psi_i}) \cup K(l_{\psi_i}), K(\varphi_j) := K(l_{\varphi_j})$,

$K(\psi_1,\ldots,\psi_m,\varphi_1,\ldots,\varphi_n) := K(\psi_1) \cup \ldots \cup K(\psi_m) \cup K(\varphi_1) \cup \ldots \cup K(\varphi_n)$

Mit $\overline{K}(k_{\psi_i})$ bzw. $\overline{K}(l_{\psi_i})$ bzw. $\overline{K}(l_{\varphi_j})$ bezeichnen wir die Menge aller Pfeilkanten in $K(k_{\psi_i})$ bzw. $K(l_{\psi_i})$ bzw. $K(l_{\varphi_j})$

Die Definitionen 1.3, 1.4 und das Lemma 1.5 werden hier kopiert und ihnen werden die Nummern 2.3, 2.4 und 2.5 gegeben.

2.6 <u>Hilfssatz</u>: $w\varepsilon W_1 \cup W_2 \Rightarrow \#_L(w) - \#_J(w) = 0$

Beweis: Falls $w\varepsilon W_1$: Beweis ist schon in Abschnitt 1 gegeben.

$w\varepsilon W_2$: Beweis durch Induktion nach $\#_b(w)$

Induktionsanfang: $\#_a(w)=0 \Rightarrow [w=e_1 \vee w=\sim Vw=f[e_o] \; Vw=f[-]] \Rightarrow$ Behauptung.

Induktionsannahme: Behauptung richtig für $\#_a(w) \leq n$.

Induktionsschluss: $\#_b(w)=n+1$: Genau wie im 1. Abschnitt, falls

$w=[u\square v]$

Falls $w= f[u]=f[u'\sqcup u"],u',u"\in W_1$:

$\#_L(f[u'\sqcup u"])=\#_L(u')+\#_L(u")+1=$(nach Induktionsannahme)

$\#_J(u')+\#_J(u")+1=\#_J(f[u'\sqcup u"])$

Das Lemma 1.7 wird hier kopiert ,ihm wird die Nummer 2.7 gegeben.

2.8 Lemma: $w=[u\sqcup v] \Rightarrow l(w)=l(u)+l(v)+3, w\in W_1 \cup W_2$

$w=f[u], u\in W_1 \Rightarrow l(w)=l(u)+3$

Beweis:Nach 1.7 brauchen wir nur den Fall $w=f[u]$ zu zeigen.

$s_{l(u)+3}(w)=s_{2+l(u)+1}(f[u])=\phi, s_{l(u)+2}(w)= s_{1+l(u)+1}(f[u])=f \neq\phi$

Das Lemma 1.9 wird hier unter der Nummer 2.9 benutzt.

2.10 Hilfssatz:i) $w\in W_1 \Rightarrow \#_L(s_n(w))- \#_J(s_n(w)) > 0$,falls $s_n(w)\neq\phi$, $n>0$

ii) $w\in W_2 \Rightarrow \#_L(s_n(w))- \#_J(s_n(w)) > 0$,falls $\phi\neq s_n(w)\neq f$,$n>0$.

Beweis: i)schon in 1.Abschnitt bewiesen.

ii) durch Induktion nach $l(w)$.

Induktionsanfang: $l(w)=0 \Rightarrow w=\phi \Rightarrow s_n(w)=\phi$.

Induktionsannahme:Sei Behauptung richtig,für alle w,mit $l(w)<m$

Induktionsschluss: auf m:

1) $w=\sim \Rightarrow s_n(w) = \phi$

2) $w=e_1 \Rightarrow s_n(w)=\phi$

3) $w=f[e_o] \Rightarrow \#_L(s_n(w))= \#_J(s_n(w))+1$,$n\in\{1,2\}$,

$s_n(w)=f$,$n=3$,

$s_n(w)=\phi$,$n>3$.

4) $w=f[-]$: genau wie in 3).

5) $w=f[u]$,$u\in W_1$

$n=0$: trivial.

$n=1$: $\#_L(s_1(f[u])) =\#_L(f[u)= 1+\#_L(u)=$(nach 2.6) $1+\#_J(u) >\#_J(u)$

$=\#_J(f[u)=\#_J(s_1(f[u]))$

$n=l(u)+2$: $s_{l(u)+2}(f[u])=f$

$n\geq l(u)+3$: $s_n(w)=\phi$.

$2\leq n\leq l(u)+1$: $\#_L(s_n(w))-\#_J(s_n(w))= \#_L(s_{n-1}(f\,u))-\#_J(s_{n-1}(f\,u))$

$=1+\#_{[}(s_{n-1}(u))-\#_{]}(s_{n-1}(u)) \Rightarrow$(nach 1.10) Behauptung.

2.11 Satz:i) $w\varepsilon W_1$, $w=[u\square v] = [u'\square v'] \Rightarrow u=u' \wedge v=v'$

ii) $w\varepsilon W_2$, $w=[u\square v]=[u'\square v'] \Rightarrow u=u' \wedge v=v'$.

iii) $w,w'\varepsilon W_1$, $f[w]= f[w'] \Rightarrow w=w'$

Beweis:i) schon in 1. Abschnitt bewiesen.

ii) Nach Lemma 2.9 setze man $l(v)=n \Rightarrow s_{n+2}([u\square v])=[u$, setze man $l(v')=m \Rightarrow s_{m+2}([u\square v]) =[u'$. O.E.d.A. sei $n < m, m=t+n \Rightarrow s_t([u)= s_t(s_{n+2}(w))=s_{m+2}(w)=[u' \Rightarrow s_t(u)=u' \Rightarrow$(nach 2.6 und 2.10) $t=0$ oder $s_t(u)=f.s_t(u)=f$ ist nicht möglich, da $f\varepsilon W_2$. Also $t=0 \Rightarrow u=u'$. Symmetrisch $v=v'$.

iii) $f[w]= f[w'] \Rightarrow s_1(f[w]) =s_1(f[w']) \Rightarrow f[w = f[w'$. Analog zu $s_n:M^n \longrightarrow M^{n-1}$ Projektion auf die ersten n-1 Komponenten, definiert man $t_n:M^n \longrightarrow M^{n-1}$ Projektion auf die letzten n-1 Komponenten $\Rightarrow t_2(f[w)=t_2(f[w') \Rightarrow w=w'$

2.12 Lemma und Definition: $(W,S,\hat{X})$ wobei $W=(W_1,W_2)$, $S=(s_1,s_2,s_3)$,

$s_1:W_1\times W_1 \longrightarrow W_1$, $s_2:W_1 \longrightarrow W_2$, $s_3:W_2\times W_2 \longrightarrow W_2$

$(u,v) \longrightarrow [u\square v]$ $u \longmapsto f[u]$ $(u,v) \longrightarrow [u\square v]$,

$\hat{X}=(e_o,-,e_1,\sim)$, $e_o,-\varepsilon W_1$, $e_1,\sim\varepsilon W_2$ ist eine Peano-Algebra vom Typ $(2,3,4,\alpha,\beta)$, wobei $\alpha(1)=(1,1,1),\alpha(2)= (1,2),\alpha(3)=(2,2,2)$, $\beta(1)=\beta(2)= 1,\beta(3)=\beta(4)=2$

Beweis: $(W,S,\hat{X})$ ist Algebra:klar. Zu zeigen, dass es Peano-Algebra ist.

$W_1 \cap W_2 = \phi$:klar. Es folgt $Bi(s_1)\cap Bi(s_2)= \phi$, und $Bi(s_1)\cap Bi(s_3)=\phi$. $Bi(s_2)\cap Bi(s_3)\neq\phi \Rightarrow \exists\, u'\varepsilon W_1\ u,v\varepsilon W : f[u']=[u\square v]$. Man definiert $p_n:M^n \longrightarrow M^{n-1}$ Projektion auf die letzten n-1 Komponenten, induziert $t_1:Z \longrightarrow Z, t_n:= (t_1)^n, t_o:=1, t_1(\phi):=\phi, t_1(x)=0\ \forall x\varepsilon M$ $\Rightarrow [u'= u\square v \Rightarrow u'=t_1(u\square v)$. Falls $u=\sim$ V $u=e_1 \Rightarrow u'= \square v$, d.h. $\square v$ ist ein Wort, aber $\square v \notin W_1 \cup W_2$:Widerspruch. Falls $u\neq\sim \wedge u\neq e_1 \Rightarrow u'= z\square v, z\varepsilon Z$: Widerspruch, da einerseits $\#_{[}(u\square)=\#_{]}(u\square)$, wenn man v fortlässt,

andererseits aber nach 2.10 gilt $\#_i(u\square) > \#_j(u\square)$.

s_1, s_2 und s_3 :injektiv :schon in 1.11 und 2.11 bewiesen.

Es ist klar dass $\forall\, u,v\in W_1$: $-\neq[u\square v]$, $\forall\, u\in W_1$: $-\neq f[u]$, $\forall\, u,v\in W_2$: $-\neq[u\square v]$. Analog für e_0,~ und e_1

A(u) sei Aussage über $u\in W_1 \cup W_2$

Induktionsanfang: $A(e_0), A(-), A(e_1), A(\sim)$

Induktionsannahme:Gelten $A(u_1), A(u_1'), A(u_2), A(u_2')$, $u_1, u_1'\in W_1, u_2, u_2'\in W$

Induktionsschluss:Gelten $A(f[u_1]), A(f[u_1']), A([u_1\square u_1']), A([u_2\square u_2'])$

Zu zeigen:A(u) für alle $u\in W_1 \cup W_2$

Beweis: Man betrachte $\{u\in W_1 \cup W_2 \mid A(u)\} = \{u\in W_1 \mid A(u)\} \cup \{u\in W_2 \mid A(u)\} \subset W_1 \cup W_2$

$\{u\in W_1 \mid A(u)\}$ erfüllt i) in Definition 2.1) nach (1),erfüllt ii) in Definition 2.1) nach (3) .$\{u\in W_2 \mid A(u)\}$ erfüllt i') in Definition 2. nach (1),erfüllt ii') und iii')nach (3),aber W_1 und W_2 sind kleins Teilmengen mit solchen Eigenschaften $\Rightarrow \{u\in W_1 \mid A(u)\} = W_1$ und $\{u\in W_2 \mid A(u)\} = W_2 \Rightarrow \forall\, u\in W_1 \cup W_2 \;\$\; A(u)$

Wie beim Abschnitt 1,definieren wir:

$$g_1 : W_1 \times \mathbb{N} \times W_1 \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$(u,r,v,s) \longmapsto r+s+(\#_a(v)+1)(\#_{e_0}([u\square v])+\#_{e_1}([u\square v])+1$$

$$g_2 : W_1 \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$(u,r) \longmapsto r+\#_{e_0}(u)+\#_a(u)$$

$$g_3 : W_2 \times \mathbb{N} \times W_2 \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$(u,r,v,s) \longmapsto r+s+(\#_a(v)+1)(\#_{e_0}([u\square v])+\#_{e_1}([u\square v])+1$$

Also folgt nach 0.14,dass es genau eine Abbildung "Rang"(Rg) gibt,

$Rg : W_1 \cup W_2 \longrightarrow \mathbb{N}$, so dass:

$Rg(e_0)=Rg(-)=Rg(e_1)=Rg(\sim)=0$,

$$\forall\, u,v\in W_1 : Rg([u\square v]) = Rg(s_1(u,v)) = g_1(u, Rg(u), v, Rg(v))$$
$$= Rg(u)+Rg(v)+(\#_a(v)+1)(\#_{e_0}([u\square v])+\#_{e_1}([u\square v])+1)-1$$

$$\forall\, u\in W_1 : Rg(f[u]) = Rg(s_2(u)) = g_2(u, Rg(u)) = Rg(u)+\#_{e_0}(u)+\#_a(u)$$

$$\forall\, u,v\in W_2 : Rg([u\square v]) = Rg(s_3(u,v)) = g_3(u, Rg(u), v, Rg(v))$$
$$= Rg(u)+Rg(v)+(\#_a(v)+1)(\#_{e_0}([u\square v])+\#_{e_1}([u\square v])+1)-1$$

2.13 Lemma: i) $(u,v,\varphi)\varepsilon K(\alpha,\delta,\zeta) \Rightarrow$ a) $\#_{\delta}(u) = \#_{\delta}(v)$

b) $\#_{\zeta}(u) + \#_{\zeta_1}(u) = \#_{\zeta_0}(v) + \#_{\zeta_1}(v)$

ii) $(u,v,\varphi)\varepsilon K(\lambda,\rho) \Rightarrow$ a) $\#_{\rho}(u) = \#_{\rho}(v) + 1$

b) $\#_{\zeta_0}(u) + \#_{\zeta_1}(u) = \#_{\zeta_0}(v) + \#_{\zeta_1}(v) + 1$

Beweis: direkt durch Induktion nach $\#_{\alpha}(\varphi)$

2.14 Satz: $(u,v,\varphi)\ K(\alpha,\lambda,\rho,\delta,\zeta) \Rightarrow Rg(v) < Rg(u)$

Beweis: Wir betrachten zunächst $(u,v,\varphi)\varepsilon K(\alpha)$, wobei $u,v\varepsilon W_2$, führen Induktion nach $\#_{\alpha}(\varphi)$

Induktionsanfang: $\#_{\alpha}(\varphi)=0 \Rightarrow$ i) $\varphi = \alpha$ V ii) $\varphi = f[\alpha]$

i) ganz analog zum Induktionsanfang des Lemmas 1.14

ii) $(f[p],f[q],f[\alpha]) = (u,v,\varphi)$

$(f[p],f[q],f[\alpha]) = (f[r\circ[s\circ t]],f[[r\circ s]\circ t],f[\alpha])$

$Rg(f[r\circ[s\circ t]]) = Rg([r\circ[s\circ t]]) + \#_{\delta_0}([r\circ[s\circ t]]) + \#_{\alpha}([r\circ[s\circ t]])$

$Rg(f[[r\circ s]\circ t]) = Rg([[r\circ s]\circ t]) + \#_{\zeta_0}([[r\circ s]\circ t]) + \#_{\alpha}([[r\circ s]\circ t])$

$\Rightarrow$ (nach 1.14 und 2.13) Behauptung.

Induktionsannahme: Sei Behauptung richtig für $\#_{\alpha}(\varphi) \leq n$

Induktionsschluss: $\#_{\alpha}(\varphi)=n+1 \Rightarrow \varphi = 1\circ g$ V $\varphi = g\circ 1$ V $\varphi = f[1\circ h]$ V $\varphi = f[h\circ 1]$,

$g\varepsilon\overline{K}(1_{\alpha})$, $h\varepsilon\overline{K}(k_{\alpha})$

$\varphi = 1\circ g$ V $\varphi = g\circ 1$: analog zu Satz 1.14

Wir betrachten $\varphi = f[1\circ h]$. Wir haben:

$(u,v,\varphi) = (f[w\circ p],f[w\circ q],f[1\circ h])$

$Rg(f[w\circ p]) = Rg([w\circ p]) + \#_{\delta_1}([w\circ p]) + \#_{\alpha}([w\circ p])$

$Rg(f[w\circ q]) = Rg([w\circ q]) + \#_{\delta_1}([w\circ q]) + \#_{\alpha}([w\circ q])$

$\Rightarrow$ (nach 1.13 und Induktionsannahme) Behauptung.

$\varphi = f[h\circ 1]$: analog zu $\varphi = f[1\circ h]$

Jetzt betrachten wir $(u,v,\varphi)\varepsilon K(\lambda)$, wobei $u,v\varepsilon W_2$. Wir Induktion nach $\#_{\lambda}(\varphi)$.

Induktionsanfang: $\#_{\lambda}(\varphi)=0 \Rightarrow$ i) $\varphi = \lambda$ V $\varphi = f[\lambda]$

i) ganz analog zum Induktionsanfang des Lemmas 1.14

ii) $(f[p],f[q],f[\lambda])=(u,v,\varphi)$

$(f[p],f[q],f[\lambda])=(f[e_0 \square q],f[q],f[\lambda])$

$Rg(f[e_0 \square q])=Rg([e_0 \square q])+1+\#_{\varepsilon_0}(q)+1+\#_{\alpha}(q) > Rg(q)+\#_{\varepsilon_0}(q)+\#_{\alpha}(q)=Rg(f[q$

Induktionsannahme:Sei Behauptung richtig für $\#_{\alpha}(\varphi) \leq n$

Induktionsschluss: $\#_{\alpha}(\varphi)=n+1 \Rightarrow \varphi = 1 \square g \vee \varphi=g \square 1 \vee \varphi=f[1 \square h] \vee \varphi=f[h \square 1]$

$g \in \overline{K}(l_\lambda)$, $h \in \overline{K}(k_\lambda)$

$\varphi=1 \square g \vee \varphi=g \square 1$:analog zu Satz 1.14

Für $\varphi=f[1 \square h]$:

$Rg(f[w \square p])-Rg(f[w \square q])=Rg([w \square p])+\#_{\varepsilon_0}([w \square p])+\#_{\alpha}([w \square p])$

$-Rg([w \square q])+\#_{\varepsilon_0}([w \square q])+\#_{\alpha}([w \square q])$

$\Rightarrow$ (nach 1.13 und Induktionsannahme) Behauptung.

$\varphi=f[h \square 1]$: ganz analog zu $\varphi=f[1 \square h]$

$(u,v,\varphi) \in K(\rho)$ ist ganz analog zu $(u,v,\varphi) \in K(\lambda)$

Wir betrachten jetzt den Fall $(u,v,\varphi) \in K(l_\delta)$.Beweis durch Induktio
nach $\#_{\alpha}(\varphi)$

Induktionsanfang: $\#_{\alpha}(\varphi)=0 \Rightarrow \varphi=\delta$,

$(u,v,\varphi)=(f[r \square t],[f[r] \square f[t]],\delta)$, $r,t \in W_1$

$Rg(f[r \square t])=Rg([r \square t])+\#_{\varepsilon_0}([r \square t])+\#_{\alpha}([r \square t])$

$=Rg(r)+Rg(t)+(\#_{\alpha}(t)+1)(\#_{\varepsilon_0}([r \square t])+1)-1$

$+\#_{\varepsilon_0}(r)+\#_{\varepsilon_0}(t)+\#_{\alpha}(r)+\#_{\alpha}(t)+1$

$Rg([f[r] \square f[t]])=Rg(f[r])+Rg(f[t])+(\#_{\alpha}(f[t])+1)(\#_{\varepsilon_0}([f[r] \square f[t]])+1)$

$=Rg(r)+\#_{\varepsilon_0}(r)+\#_{\alpha}(r)+Rg(t)+\#_{\varepsilon_0}(t)+\#_{\alpha}(t)$

$+(\#_{\alpha}(t)+1)(\#_{\varepsilon_0}(r)+\#_{\varepsilon_0}(t)+1)-1$

$\Rightarrow Rg(f[r \square t])-Rg([f[r] \square f[t]])=1$

Induktionsannahme: Sei Behauptung für $\#_{\alpha}(\varphi) \leq n$

Induktionsschluss: $(\varphi)=n+1 \Rightarrow$ i) $\varphi=1 \square \psi$ V ii) $\varphi=\psi \square 1$, $\psi \in \overline{K}(l_\delta)$

Falls $\varphi=1 \square \psi$: $(u,v,\varphi)=([w \square p]),[w \square q],[1 \square \psi])$

$Rg([w \square p])=Rg(w)+Rg(p)+(\#_{\alpha}(p)+1)(\#_{\varepsilon_0}([w \square p])+\#_{\varepsilon_1}([w \square p])+1)-1$

$Rg([w \square q])=Rg(w)+Rg(q)+(\#_{\alpha}(q)+1)(\#_{\varepsilon_0}([w \square q])+\#_{\psi_1}([w \square q])+1)-1$

$\Rightarrow$ (nach 2.13 und Induktionsannahme) Behauptung.

$\varphi=\psi\square 1$: analog zu $\varphi=1\square\psi$.

Wir kommen jetzt zum Fall $(u,v,\varphi)\in K(1_\zeta)$, führen Induktion, wie immer, nach $\dagger_b(\varphi)$, als Beweis:

Induktionsanfang: $\dagger_a(\varphi)=0 \Rightarrow \varphi=\zeta$

$Rg(f[e_o])=1, Rg(e_1)=0 \Rightarrow$ Behauptung. Rest analog wie bei anderen Fällen.

Man kopiert die Definition eines Weges (1.15), und gibt dazu die Nummer 2.15.

2.16 Die Bilder: Wir betrachten $(\mathfrak{C},\otimes,I),(\mathfrak{D},\otimes,J)$ zwei monoidale Kategorien, $\mathfrak{F}:\mathfrak{C}\longrightarrow\mathfrak{D}$ monoidaler Funktor, $A\varepsilon Ob(\mathfrak{C}),B\varepsilon Ob(\mathfrak{D})$. Wir haben schon in 2.12 bewiesen, dass $(W,S,\hat{X})$ mit $W=(W_1,W_2)$, $S=(s_1,s_2,s_3),\hat{X}=(e_o,-,e_1,\sim)$,

$s_1: W_1\times W_1\longrightarrow W_1$, $s_2: W_1\longrightarrow W_2$, $s_3: W_2\times W_2\longrightarrow W_2$

$(u,v)\longmapsto[u\square v]$ $\quad u\longmapsto f[u]$ $\quad (u,v)\longmapsto[u\square v]$

eine Peano-Algebra ist. Jetzt definieren wir:

$Q:=Ob(\mathfrak{C})\cup Ob(\mathfrak{D})\cup\{\infty\}$,

$g_1: W_1\times Q\times W_1\times Q\longrightarrow Q$

$(u,r,v,s)\longmapsto\begin{cases}r\otimes s,\text{falls } r,s\varepsilon Ob(\mathfrak{C})\\ \infty,\text{sonst.}\end{cases}$

$g_2: W_1\times Q\longrightarrow Q$

$(u,r)\longmapsto\begin{cases}\mathfrak{F}(r),\text{falls } r\varepsilon Ob(\mathfrak{C})\\ \infty,\text{sonst.}\end{cases}$

$g_3: W_2\times Q\times W_2\times Q\longrightarrow Q$

$(u,r,v,s)\longmapsto\begin{cases}r\otimes s,\text{falls } r,s\varepsilon Ob(\mathfrak{D})\\ \infty,\text{sonst.}\end{cases}$

Dann existiert nach 0.14 genau eine Abbildung $h:W_1\cup W_2\longrightarrow Q$, so dass:

$h(e_o)=I$, $h(-)=A$, $h(e_1)=J$, $h(\sim)=B$,

$\forall\, u,v\varepsilon W_1$: $h([u\square v])=h(s_1(u,v))=g_1(u,h(u),v,h(v))\overset{*}{=}h(u)\otimes h(v)$.

$\forall\, u\varepsilon W_1$: $h(f[u])=h(s_2(u))=g_2(u,h(u))\overset{**}{=}\mathfrak{F}(h(u))$.

Man setze: $\forall\, u\in W_1$: $h(u)=u_A$, also:

$\forall\, u,v\varepsilon W_1$: $h([u\square v])=u_A\otimes v_A$,

$\forall\, u\varepsilon W_1$: $h(f[u])=\mathfrak{F}(u_A)$

$\forall\, u,v\varepsilon W_2$: $h([u\square v])=h(s_3(u,v))=g_3(u,h(u),v,h(v))\overset{***}{=}h(u)\otimes h(v)$

Man setze: $\forall\, u\ \varepsilon W_2$: $h(u)=u_B$, also:

$\forall\, u,v\ W_2$: $h([u\square v])=u_B\otimes v_B$

Die Rechtfertigung von $*,\overset{**}{=},\overset{***}{=}$ ist dass: $\forall\ w\varepsilon W_1$: $h(w)\varepsilon Ob(\mathfrak{C})\wedge$ $\forall\ w\varepsilon W_2$: $h(w)\varepsilon Ob(\mathfrak{D})$, ein Beweis dafür ist mit Induktion in

der Peano-Algebra $(W,S,\hat{X})$ zu führen, mit anderen Worten nach der Anzahl der "□" in w. Also : $\forall\, w\in W_1 \cup W_2 : h(w) \neq \infty$

Wir nennen u_A das Bild von $u\in W_1$, und u_B das Bild von $u\in W_2$.

Wir zeigen jetzt, dass "Kanten bilden eine Peano-Algebra".

Lemma: $(K,S,\hat{K})$, wobei $K=(K(k_{\psi_i}),K(l_{\psi_i}),K(l_{\varphi_j}))$, $S=(s_{1,w},\ldots,s_{7,w})$, $\hat{K}=(k_\alpha,l_\alpha,k_\lambda,l_\lambda,k_\rho,l_\rho,l_\delta,l_\zeta,k_{\alpha^{-1}},l_{\alpha^{-1}},k_{\lambda^{-1}},l_{\lambda^{-1}},k_{\rho^{-1}},l_{\rho^{-1}},l_{\delta^{-1}},l_{\zeta^{-1}})$,

(Wir schreiben K_1 statt $K(k_{\psi_i})$, K_2 statt $K(l_{\psi_i})$, K_3 statt $K(l_{\varphi_j})$)

$s_{1,w}: K_1 \longrightarrow K_1$

$(u,v,\varphi) \longmapsto ([u\square w],[v\square w],[\varphi\square 1])$, $w\in W_1$

$s_{2,w}: K_1 \longrightarrow K_1$

$(u,v,\varphi) \longmapsto ([w\square u],[w\square v],[1\square\varphi])$, $w\in W_1$

$s_{3,w}: K_2 \longrightarrow K_2$

$(u,v,\varphi) \longmapsto ([u\square w],[v\square w],[\varphi\square 1])$, $w\in W_2$

$s_{4,w}: K_2 \longrightarrow K_2$

$(u,v,\varphi) \longmapsto ([w\square u],[w\square v],[1\square\varphi])$, $w\in W_2$

$s_5: K_1 \longrightarrow K_2$

$(u,v,\varphi) \longmapsto (f[u],f[v],f[\varphi])$

$s_{6,w}: K_3 \longrightarrow K_3$

$(u,v,\varphi) \longmapsto ([u\square w],[v\square w],[\varphi\square 1])$, $w\in W_2$

$s_{7,w}: K_3 \longrightarrow K_3$

$(u,v,\varphi) \longmapsto ([w\square u],[w\square v],[1\square\varphi])$, $w\in W_2$

ist Peano-Algebra vom Typ $(3,\chi_o,16,\alpha,\beta)$, wobei:

$\alpha(1)=\alpha(2)=(1,1)$, $\alpha(3)=\alpha(4)=(2,2)$, $\alpha(5)=(1,2)$, $\alpha(6)=\alpha(7)=(3,3)$,

$\beta(1)=\beta(3)=\beta(5)=\beta(9)=\beta(11)=\beta(13)=1$,

$\beta(2)=\beta(4)=\beta(6)=\beta(10)=\beta(12)=\beta(14)=2$, $\beta(7)=\beta(8)=\beta(15)=\beta(16)=3$

Beweis: Alles ist Routine. Wir zeigen nur 4') bei Definition 0.2.

$A(u,v,\varphi)$ sei eine Aussage über $(u,v,\varphi)\in K_1 \cup K_2 \cup K_3$

Induktionsanfang: Gelten $A(k_\alpha),\ldots,A(l_{\zeta^{-1}})$

Induktionsannahme: Gelten $A((u_1,v_1,\varphi_1))$, $A((u_2,v_2,\varphi_2))$, $A((u_3,v_3,\varphi_3))$,

$(u_1,v_1,\varphi_1)\in K_1$, $(u_2,v_2,\varphi_2)\in K_2$, $(u_3,v_3,\varphi_3)\in K_3$

Induktionsschluss: Gelten :

1) $\forall\, w\varepsilon W_1$: $A(([u_1 \square w],[v_1 \square w],[\varphi_1 \square 1])), A(([w \square u_1],[w \square v_1],[1 \square \varphi_1]))$,

2) $\forall\, w\varepsilon W_2$: $A(([u_2 \square w],[v_2 \square w],[\varphi_2 \square 1])), A(([w \square u_2],[w \square v_2],[1 \square \varphi_2]))$,

$A((f[u_1],f[v_1],f[\varphi_1]))$,

3) $\forall w\varepsilon W_2$: $A(([u_3 \square w],[v_3 \square w],[\varphi_3 \square 1])), A(([w \square u_3],[w \square v_3],[1 \square \varphi_3]))$.

Zu zeigen: $A((u,v,\varphi))$ für alle $(u,v,\varphi)\varepsilon K_1 \cup K_2 \cup K_3$

Beweis: Man betrachte $\{(u,v,\varphi)\varepsilon K_1 \cup K_2 \cup K_3 \mid A((u,v,\varphi))\}$

$= \{(u,v,\varphi)\varepsilon K_1 \mid A((u,v,\varphi))\} \cup \{(u,v,\varphi)\varepsilon K_2 \mid A((u,v$

$\cup \{(u,v,\varphi)\varepsilon K_3 \mid A((u,v,\varphi))\}$

$\{(u,v,\varphi)\varepsilon K_1 \mid A((u,v,\varphi))\}$ enthält $k_\alpha, \ldots, k_{\rho-1}$ nach Induktionsanfang, und erfüllt 1) nach Induktionsschluss. Aber K_1 ist die kleinste Teilmenge von $W_1 \times W_1 \times Y$ die solche Eigenschaften erfüllt $\Rightarrow$ $\{(u,v,\varphi)\varepsilon K_1 \mid A((u,v,\varphi))\} = K_1$. Analog zum Rest $\Rightarrow$ Behauptung.

Jetzt betrachten wir wieder die monoidalen Kategorien $(\mathfrak{C},\otimes,I)$, $(\mathfrak{D},$ schreiben $(u_A,v_A,\varphi)\varepsilon\mathfrak{C}$, $(u_B,v_B,\varphi)\varepsilon$ analog zu 1.16, definieren:

$Q := \mathfrak{C} \cup \mathfrak{D} \cup \{\infty\}$

$g_{1,w}: K_1 \times Q \longrightarrow Q$

$((u,v,\varphi),(r,s,\psi)) \longmapsto \begin{cases} (r \otimes w_A, s \otimes w_A, \psi \otimes 1), \text{falls } (r,s,\psi \\ \infty, \text{ sonst.} \end{cases}$ $(w\varepsilon W_1)$

$g_{2,w}: K_1 \times Q \longrightarrow Q$

$((u,v,\varphi),(r,s,\psi)) \longmapsto \begin{cases} (w_A \otimes r, w_A \otimes s, 1 \otimes \psi), \text{falls } (r,s,\psi \\ \infty, \text{ sonst.} \end{cases}$ $(w\varepsilon W_1)$

$g_{3,w}: K_2 \times Q \longrightarrow Q$

$((u,v,\varphi),(r,s,\psi)) \longmapsto \begin{cases} (r \otimes w_B, s \otimes w_B, \psi \otimes 1), \text{falls } (r,s,\psi \\ \infty, \text{ sonst.} \end{cases}$ $(w\varepsilon W_2$

$g_{4,w}: K_2 \times Q \longrightarrow Q$

$((u,v,\varphi),(r,s,\psi)) \longmapsto \begin{cases} (w_B \otimes r, w_B \otimes s, 1 \otimes \psi), \text{falls } (r,s,\psi \\ \infty, \text{ sonst.} \end{cases}$ $(w\varepsilon W_2$

$g_5: K_1 \times Q \longrightarrow Q$

$((u,v,\varphi),(r,s,\psi)) \longmapsto \begin{cases} (\mathfrak{F}(r), \mathfrak{F}(s), \mathfrak{F}(\psi)), \text{falls } (r,s, \\ \infty, \text{ sonst.} \end{cases}$

$g_{6,w}: K_3 \times Q \longrightarrow Q$

$((u,v,\varphi),(r,s,\psi)) \longrightarrow \begin{cases} (r \otimes w_B, s \otimes w_B, \psi \otimes 1), \text{falls } (r,s,\psi) \in \mathfrak{D} \\ \infty, \text{sonst} \end{cases} \quad (w \in W_2)$

$g_{7,w}: K_3 \times Q \longrightarrow Q$

$((u,v,\varphi),(r,s,\psi)) \longrightarrow \begin{cases} (w_B \otimes r, w_B \otimes s, 1 \otimes \psi), \text{falls } (r,s,\psi) \in \mathfrak{D} \\ \infty, \text{sonst.} \end{cases} \quad (w \in W_2)$

Nach 0.14 existiert genau eine Abbildung $h_1: K_1 \cup K_2 \cup K_3 \longrightarrow Q$, so dass:

$\forall\, \varphi \in \{\alpha, \lambda, \rho, \bar{\alpha}^1, \bar{\lambda}^1, \bar{\rho}^1, \delta, \zeta, \delta^1, \zeta^1\} : h_1(u,v,\varphi) = (h(u), h(v), \varphi)$ und:

$\forall\, (u,v,\varphi) \in K_1, \forall\, w \in W_1$:

$h_1([u \square w],[v \square w],[\varphi \square 1]) = h_1(s_{1,w}(u,v,\varphi)) = g_{1,w}((u,v,\varphi), h_1(u,v,\varphi))$,

$h_1([w \square u],[w \square v],[1 \square \varphi]) = h_1(s_{2,w}(u,v,\varphi)) = g_{2,w}((u,v,\varphi), h_1(u,v,\varphi))$.

$\forall\, (u,v,\varphi) \in K_2$, $\forall\, w \in W_2$:

$h_1([u \square w],[v \square w],[\varphi \square 1]) = h_1(s_{3,w}(u,v,\varphi)) = g_{3,w}((u,v,\varphi), h_1(u,v,\varphi))$,

$h_1([w \square u],[w \square v],[1 \square \varphi]) = h_1(s_{4,w}(u,v,\varphi)) = g_{4,w}((u,v,\varphi), h_1(u,v,\varphi))$,

$\forall\, (u,v,\varphi) \in K_1$:

$h_1(f[u], f[v], [\varphi]) = h_1(s_{5,w}(u,v,\varphi)) = g_{5,w}((u,v,\varphi), h_1(u,v,\varphi))$,

$\forall\, (u,v,\varphi) \in K_3$, $\forall\, w \in W_2$:

$h_1([u \square w],[v \square w],[\varphi \square 1]) = h_1(s_{6,w}(u,v,\varphi)) = g_{6,w}((u,v,\varphi), h_1(u,v,\varphi))$,

$h_1([w \square u],[w \square v],[1 \square \varphi]) = h_1(s_{7,w}(u,v,\varphi)) = g_{7,w}((u,v,\varphi), h_1(u,v,\varphi))$.

Jetzt die Abbildung $h_1: K_1 \cup K_2 \cup K_3 \longrightarrow Q$, definiert durch:

$\forall\, \varphi \in \{\alpha, \lambda, \rho, \bar{\alpha}^1, \bar{\lambda}^1, \bar{\rho}^1, \delta, \zeta, \delta^1, \zeta^1\} : h_1(u,v,\varphi) := (h(u), h(v), \varphi)$,

$\forall\, (u,v,\varphi) \in K_1 \cup K_2 \cup K_3$, $\forall\, w \in W_1 \cup W_2$:

$h_1([w \square u],[w \square v],[1 \square \varphi]) := (h([w \square u]), h([w \square v]), 1 \otimes \varphi)$, (so lange die Kante $([w \square u],[w \square v],[1 \square \varphi])$ definiert ist)

$h_1([u \square w],[v \square w],[\varphi \square 1]) := (h([u \square w]), h([v \square w]), \varphi \otimes 1)$, (so lange die Kante $([u \square w],[v \square w],[\varphi \square 1])$ definiert ist)

$h_1(f[u], f[v], f[\varphi]) := \mathfrak{F}(h_1(u,v,\varphi))$, $(\forall\, (u,v,\varphi) \in K_1)$

erfüllt die obigen Bedingungen. Beweis ist durch Induktion in der Peano-Algebra $(K, S, \hat{K})$:

$\forall\ (u,v,\varphi)\varepsilon K_3,\ \forall\ w\varepsilon W_2$:

$h_1([u\square w],[v\square w],[\varphi\square 1]) = (u_B \otimes w_B, v_B \otimes w_B, \varphi\otimes 1) \overset{*}{=} g_{6,w}((u,v,\varphi),(u_B,v_B,\varphi))$

$= g_{6,w}((u,v,\varphi), h_1(u,v,\varphi))$ .Rest analog.

Die Rechtfertigung von $\overset{*}{=}$ ist:

$\forall\ (u,v,\varphi)\varepsilon K_1 : h_1(u,v,\varphi)\varepsilon\mathfrak{C},\ \forall\ (u,v,\varphi)\varepsilon K_2 \cup K_3 : h_1(u,v,\varphi)\varepsilon\mathfrak{S}$:

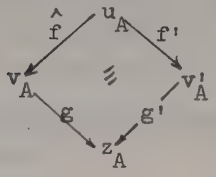
Beweis ist durch Induktion in der Peano-Algebra $(K,S,\hat{K})$, klar.

Es folgt, dass: $\forall\ (u,v,\varphi)\ K_1 \cup K_2 \cup K_3 : h_1(u,v,\varphi) \neq \infty$

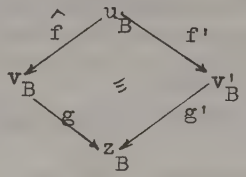
Jetzt, nachdem wir gesehen haben, wie die Bilder aussehen, kommen wir zum:

2.17 Satz: $\forall\ (u,v,\hat{f}),(u,v',f')\varepsilon K(\alpha,\lambda,\rho,\delta,\zeta), v\neq v'$

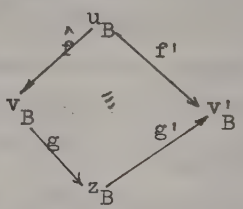
a) $\exists\ (v,z,g),(v',z,g')\varepsilon K(\alpha,\lambda,\rho,\delta,\zeta)$ mit:



oder

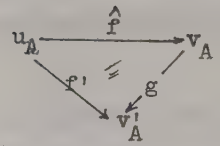


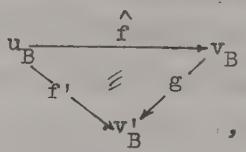
oder $\exists\ (v,z,g),(z,v',g')\varepsilon K(\lambda,\rho,\zeta)$ mit:



, oder :

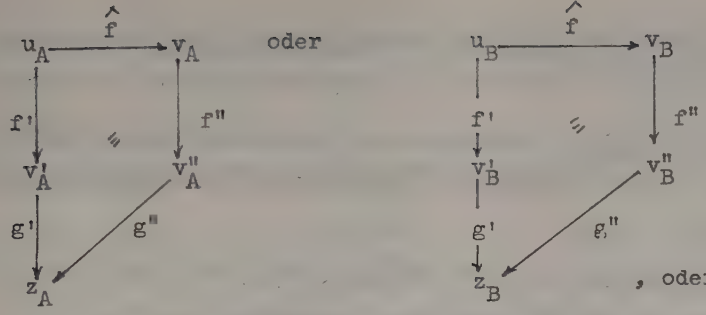
b) $\exists\ (v,v',g)\varepsilon K(\lambda,\rho)$ mit: (evtl. muss die Rolle von g vertauscht werden)



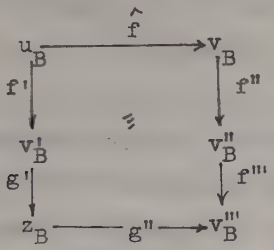


, oder:

c) $\exists\ (v',z,g'),(v,v'',f''),(v'',z,g'')\varepsilon K(\alpha)$ mit:
(evtl. müssen die Rollen von g', g'' und f'' vertauscht werden)



d) $\exists\ (v',z,g'),(v,v'',f''),(v'',v''',f'''),(z,v''',g'')\in K(\alpha,\delta)$ mit:



Beweis: durch Induktion nach $\#_{\square}(u)$:

Induktionsanfang: $\#_{\square}(u)=0 \Rightarrow u=e_0 \vee u=- \vee u=e_1 \vee u=\sim$

$\vee\ u=f[e_0] \vee u=f[-]$

Falls $u=f[e_0]$ gibt es kein f.

Falls $u=f[e_0]$: $f=f'=\zeta \Rightarrow v=v'$

Induktionsannahme: Sei Behauptung für $\#_{\square}(u) \leqslant n$.

Induktionsschluss: $\#_{\square}(u)=n+1$ Wir betrachten alle Möglichkeiten:

$\hat{f}=\alpha, f'=\alpha$, $\hat{f}=\alpha, f'=\lambda$, $\hat{f}=\alpha, f'=\rho$: schon im Abschnitt 1 betrachtet.

$\hat{f}=\alpha, f'=\delta$: kann nicht auftreten, da: Existenz von α bedeutet, dass das Wort mit $[$ anfängt, während Existenz von δ bedeutet, dass das Wort mit "f" anfängt.

$\hat{f}=\alpha, f'=\zeta$: Es kann nicht auftreten, da: ζ bedeutet, dass das Wort $f[e_0]$ ist, α bedeutet, dass das Wort mit $[$ anfängt.

$\hat{f}=\alpha, f'=f''\square 1$: schon im 1. Abschnitt betrachtet.

$\hat{f}=\alpha, f'=1\square f''; f''=\alpha,\lambda,\rho$: auch in §1 betrachtet.

$\hat{f}=\alpha, f'=1\square f'', f''=\delta$: $\alpha \Rightarrow u=[p\square[q\square z]]$, aber $1\square\delta \Rightarrow u=[r\square f[s\square t]]$, wobei

p,q,z,r,s,t Worte sind $\Rightarrow [q\square z]=f[s\square t]$, also kann es nicht auftreten.

$\hat{f}=\alpha, f'=1 \square f'', f''=\zeta$: unmöglich (ähnliches Argument wie beim letzten Fall)

$\hat{f}=\alpha, f'=1 \square f'', f''=f[h]$, $h \varepsilon \overline{K}(\alpha,\lambda,\rho,\delta,\zeta)$:unmöglich(auch ähnliches Argument für $h=\alpha$ V $h=\lambda$ V $h=\rho$, für $h=\delta$ V $h=\zeta$ ist $f[h]$ nicht definiert.)

$\hat{f}=\alpha, f'=f[h]; h \varepsilon \overline{K}(\alpha,\lambda,\rho,\delta,\zeta)$: unmöglich($f[\delta], f[\zeta]$ sind nicht definiert,für den Rest ähnliches Argument zu $\hat{f}=\alpha, f'=\delta$)

$\hat{f}=\lambda, f'=\lambda$, $\hat{f}=\lambda, f'=\rho$: schon in §1 diskutiert.

$\hat{f}=\lambda, f'=\delta$: $\lambda \Rightarrow$ das Wort "u" fängt mit "[" an, $\delta \Rightarrow$ u fängt mit "f" an,also unmöglich.

$\hat{f}=\lambda, f'=\zeta$:unmöglich(ähnliches Argument zum letzten Fall)

$\hat{f}=\lambda, f'=f[h], h \varepsilon \overline{K}(\alpha,\lambda,\rho,\delta,\zeta)$:unmöglich ($f[\delta], f[\zeta]$ sind nicht definiert,sonst ähnliches Argument zum letzten Fall)

$\hat{f}=\lambda, f'=1 \square f''$, $\hat{f}=\lambda, f'=f'' \square 1$:schon in §1 betrachtet.

$\hat{f}=\rho, f'=\rho$:schon in §1 diskutiert.

$\hat{f}=\rho, f'=\delta$: Es kann nicht auftreten,ähnlich zum Fall $\hat{f}=\lambda, f'=\delta$

$\hat{f}=\rho, f'=\zeta$:Es kann nicht auftreten,auch ähnliches Argument.

$\hat{f}=\rho, f'=1 \square f''$, $\hat{f}=\rho, f'=f'' \square 1$: schon in §1 diskutiert.

$\hat{f}=\rho, f'=f[h], h \varepsilon \overline{K}(\alpha,\lambda,\rho,\delta,\zeta)$: Es tritt nicht auf ,wie beim Fall $\hat{f}=\lambda, f'=f[h], h \varepsilon \overline{K}(\alpha,\lambda,\rho,\delta,\zeta)$

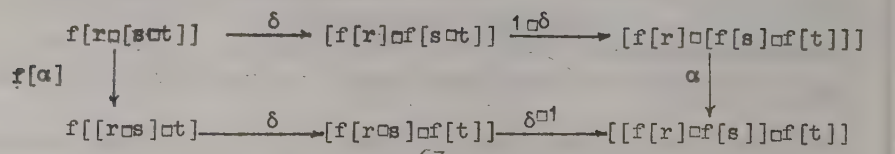
$\hat{f}=\delta, f'=\delta$: $\Rightarrow v=v'$

$\hat{f}=\delta, f'=\zeta$: Es kann nicht auftreten,da $\delta \Rightarrow u=f[v \square w], v, w \varepsilon W_1, \zeta \Rightarrow u=f[e_o] \Rightarrow \exists\, v,w \varepsilon W_1 : e_o=[v \square w]$:Widerspruch zu $W_1=D_{s_1}(-,e_o)$

$\hat{f}=\delta, f'=f'' \square 1$: unmöglich,da $\delta \Rightarrow$ u fängt mit "f" an,andererseits f" $\square 1 \Rightarrow$ u fängt mit "[" an.

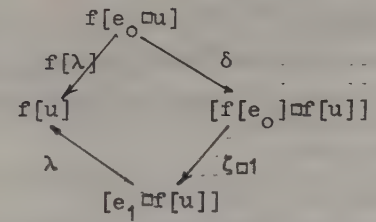
$\hat{f}=\delta, f'=1 \square f''$:unmöglich,ähnlich zum letzten Fall.

$\hat{f}=\delta, f'=f[h], h=\alpha$: Wir haben:



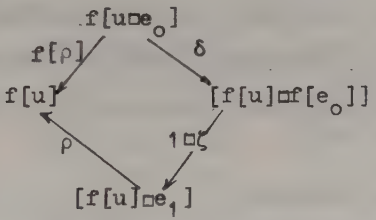
Wir ergänzen das Diagramm wie gezeigt, das Diagrammdes Bildes kommutiert nach Voraussetzung($\mathfrak{F}:\mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$ ein monoidaler Funktor)

$\hat{f}=\delta, f'=f[h], h=\lambda$: Wir ergänzen das Diagramm wie folgt:



Das Diagramm des Bildes kommutiert nach Voraussetzung ($\mathfrak{F}:\mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$ ein monoidaler Funktor)

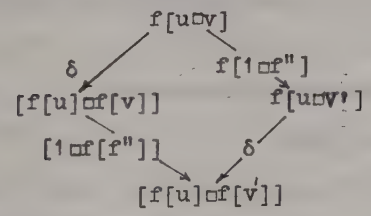
$\hat{f}=\delta, f'=f[h], h=\rho$: Wir ergänzen das Diagramm wie folgt:



Genau, wie beim letzen Fall, kommutiert das Diagramm des Bildes.

$\hat{f}=\delta, f'=f[h], h=\delta \vee h=\zeta$:Es kann nicht auftreten, da $f[\delta]$ und $f[\zeta]$ nicht definiert sind.

$\hat{f}=\delta, f'=f[h], h=1\square f''; f''\varepsilon\overline{K}(\alpha,\lambda,\rho)$:



Das Diagramm des Bildes kommutiert, da δ natürliche Transformation ist. Wir haben hier $f''\varepsilon\overline{K}(\alpha,\lambda,\rho)$ und nicht $f''\varepsilon\overline{K}(\delta,\zeta)$ betrachtet, da $f[1\square\delta]$ nicht definiert ist, genau so $f[1\square\zeta]$.

$\hat{f}=\delta, f'=f[h], h=f''\square 1$, $f''\varepsilon\overline{K}(\alpha,\lambda,\rho)$: ganz analog zum letzten Fall.

$\hat{f}=\delta, f'=f[h], h=f[g]$: Es kann nicht auftreten, da f[f[g]] nicht definiert ist.

$\hat{f}=\zeta, f'=\zeta$: $\Rightarrow v=v'$.

$\hat{f}=\zeta, f'=f"\square 1$: Es kann nicht auftreten: $\zeta \Rightarrow$ u fängt mit "f" an, während $f"\square 1 \Rightarrow$ u fängt mit "[" an.

$\hat{f}=\zeta, f'=1\square f"$: Es kann nicht auftreten, analog zum letzten Fall.

$\hat{f}=\zeta, f'=f[f"]$: Es tritt nicht auf, da es keine Kante gibt, deren erste Komponente e_0 ist.

$\hat{f}=1\square g, f'=1\square h$: schon in §1 betrachtet.

$\hat{f}=1\square g, f'=h\square 1$: schon in §1 betrachtet.

$\hat{f}=f[h], f'=f"\square 1$: Es kann nicht auftreten: $f[h] \Rightarrow$ u fängt mit "f" an, aber $f"\square 1 \Rightarrow$ u fängt mit "[" an.

$\hat{f}=f[h], f'=1\square f^{v}$: Es kann nicht auftreten, analog zum letzten Fall.

$\hat{f}=f[h], f'=f[g]$: Das ist eine Wiederholung des Berechnens der Möglichkeiten, mit einer Einschränkung, zum Beispiel f[δ] kommt nicht in Frage.

Also ist der Satz bewiesen.

2.18 Lemma: i) Gegeben sei $w\varepsilon W_1$, $\#_{e_0}(w) \geq 1$, $\#_{-}(w) \geq 1$, dann existieren $w'\varepsilon W_1$, $\#_{e_0}(w')=0$ und ein Weg von w nach w' mit Kanten aus $K(\lambda,\rho)$.

ii) Gegeben sei $w\varepsilon W_2$, $\#_{e_0}(w)+\#_{e_1}(w) \geq 1$, $\#_{-}(w)+\#_{\sim}(w) \geq 1$, dann existieren $w'\varepsilon W_2$, $\#_{e_0}(w')=\#_{e_1}(w')=0$ und ein Weg von w nach w' mit Kanten aus $K(\lambda,\rho,\delta,\zeta)$

Beweis: i) Schon in §1 bewiesen (Lemma 1.18)

ii) durch Induktion nach $\#_{\square}(w)$.

Induktionsanfang: $\#_{\square}(w)=0 \Rightarrow w=f[e_0]$ Vw=f[-] Vw=e_1 Vw=~ $\Rightarrow$ Behauptung.

Induktionsannahme: Behauptung richtig für $\#_{\square}(w) \leq n$.

Induktionsschluss: analog zu i), falls $w=[u\square v]$, $\#_{\square}(u) \leq n \geq \#_{\square}(v)$.

Die Kanten sind aus $K(\lambda,\rho,\zeta)$. ζ tauscht $f[e_0]$ mit e_1 aus.

Falls w=f[u□v], $\#_{\square}(u) \leq n \geq \#_{\square}(v)$, wende man δ zunächst, erhält [f[u]□f[v]], $\#_{\square}(u) < n \geq \#_{\square}(v)$, dann geht das Verfahren wieder analog. Tatsächlich ist δ nicht notwendig, es ist leichter es auszunutzen.

2.19 Definition: Standardwort in W_2 "$w_{st.}$" (rekursiv)

~ und f[-] sind Standardworte.

u Standardwort ⇒ [u□~],[u□f[-]] sind Standardworte.

Unser Ziel ist zu zeigen, dass falls ein Weg von einem Wort zu einem anderen Wort existiert, dann haben beide Worte dasselbe Standardwort. Deshalb beweisen wir das folgende Lemma:

Lemma: $(Z,(s_1,\ldots,s_8),\{\phi\})$ ist eine Peano-Algebra vom Typ $(1,8,1,\alpha,\beta)$, wobei:

$s_1: Z \longrightarrow Z$, $z \longmapsto z[$; $s_2: Z \longrightarrow Z$, $z \longmapsto z]$; $s_3: Z \longrightarrow Z$, $z \longmapsto z\square$

$s_4: Z \longrightarrow Z$, $z \longmapsto z-$; $s_5: Z \longrightarrow Z$, $z \longmapsto zf$; $s_6: Z \longrightarrow Z$, $z \longmapsto z\sim$

$s_7: Z \longrightarrow Z$, $z \longmapsto ze_0$; $s_8: Z \longrightarrow Z$, $z \longmapsto ze_1$

$\forall\, j \in \{1,\ldots,8\}, \alpha(j)=(1,1)$, und $\beta(1)=1$

Beweis: Dass $(Z,(s_1,\ldots,s_8),\{\phi\})$ Algebra ist, ist klar. Nur zu zeigen, dass es Peano-Algebra ist.

$i \neq j \Rightarrow Bi(s_i) \cap Bi(s_j) = \phi$ ist klar. Wir beweisen nur den Fall: $Bi(s_1) \cap Bi(s_2) = \phi$. Wir nehmen an, dass $Bi(s_1) \cap Bi(s_2) \neq \phi$, dann folgt $\exists\, x \in Bi(s_1) \cap Bi(s_2)$: $x = z_1[= z_2]$, $z_1, z_2 \in Z \Rightarrow z[=]$, oder $z]=[$ für ein $z \in Z$. $\Rightarrow z = \phi \Rightarrow [=]$, wobei [und] zwei verschiedene Zeichnen. Also folgt die Behauptung.

$\forall\, j \in \{1,\ldots,8\}: s_j$ injektiv. Falls j=1: sei $z_1[= z_2[\Rightarrow s_1(z_1[) = s_1(z_2[) \Rightarrow z_1 = z_2$. Rest analog.

Es ist klar, dass für alle $j \in \{1,\ldots,8\}$: $\phi \notin Bi(s_j)$

Für 4') bei Definition 0.2 : "⇒":trivial.

"⇐":gegeben $z \in Z$ und zu zeigen A(z).Beweis durch Induktion nach l(z) (Länge von z)

Induktionsanfang: $l(z)=1 \Rightarrow z \in \{[,],\square,-,f,\sim,e_0,e_1\}$.Nach 1) bei 4') ist $A(\phi)$,nach 2) bei 4') folgt: $\forall\, j \in \{1,\ldots,8\}: A(s_j(\phi))$.

Induktionsannahme: Behauptung richtig für $l(z) \leqslant n$.

Induktionsschluss: $l(z)=n+1 \Rightarrow z=z'y, y \in \{[,],\square,-,f,\sim,e_0,e_1\}$.A(z') folgt nach Induktionsannahme, $\forall\, j \in \{1,\ldots,8\}$ folgt $A(s_j(z'))=A(z)$ nach 2) bei 4').Also folgt die Behauptung.

Jetzt seien $\forall j \in \{1,\ldots,8\}, g_j: Z \times A \longrightarrow A$,wobei A die Menge der Standardworte,$\alpha(j)=(1,1)$ definiert durch:

$$g_j(z,s)=\begin{cases} s & , j \in \{1,2,3,5,7,8\} \\ \begin{cases} [s\square f[-]] & ,s=0 \\ f[-] & ,s=0 \end{cases} & ,j=4 \\ \begin{cases} [s\square\sim] & ,s=0 \\ \sim & ,s=0 \end{cases} & ,j=6 \end{cases}$$

Dann folgt nach 0.14 ,dass genau eine Abbildung $\Phi: Z \longrightarrow A$ existiert,so dass:

$\Phi(\phi) = \phi$,

$\Phi(s_j(z))=g_j(z,\Phi(z))$,also folgt:

$\Phi(s_j(z)) = \Phi(z)$, $j \in \{1,2,3,5,7,8\}$

$$\Phi(s_j(z)) = \begin{cases} [\Phi(z)\square f[-]] & , \Phi(z) \neq \phi \\ f[-] & , \Phi(z)=\phi \end{cases} \quad ,j=4$$

$$\Phi(s_j(z)) = \begin{cases} [\Phi(z)\square\sim] & , \Phi(z) \neq \phi \\ \sim & , \Phi(z)=\phi \end{cases} \quad ,j=6$$

Wir zeigen jetzt,dass:

(*1) $\forall\, u,v \in Z: \Phi(u[v) = \Phi(uv)$.

Beweis ist durch Induktion nach v.

Induktionsanfang: $v=\phi$: $\Phi(u[)= \Phi(u)$

Induktionsannahme: $\Phi(u[v)=\Phi(uv)$

Induktionsschluss:

$\forall\, j\in\{1,2,3,5,7,8\}$: $\Phi(u[s_j(v)) = \Phi(s_j(u[v)) = \Phi(u[v) =$(nach Induktionsannahme) $\Phi(uv) = \Phi(s_j(uv)) = \Phi(us_j(v))$

Falls $j=4$: $\Phi(u[s_j(v)) = \Phi(s_j(u[v))$

$$= \begin{cases} [\Phi(u[v) \square f[-]] & , \Phi(u[v) \neq \emptyset \\ f[-] & , \Phi(u[v) = \emptyset \end{cases}$$

$$= \text{(nach Induktionsannahme)}$$

$$\begin{cases} [\Phi(uv) \square f[-]] & , \Phi(uv) \neq \emptyset \\ f[-] & , \Phi(uv) = \emptyset \end{cases}$$

$$= \Phi(s_j(uv)) = \Phi(us_j(v)).$$

Falls $j=6$:ganz analog zum Fall $j=4$.Also folgt die Behauptung.

Als Folgerung haben wir:

(*2) $\qquad \Phi([v) = \Phi(v)$

Jetzt,mit Hilfe dieser Folgerung gehen wir einen Schritt weiter, und zeigen:

<u>Lemma</u>: $\Phi^2 = \Phi$

Beweis: durch Induktion in der Peano-Algebra $(Z, (s_j)_{j\in\{1,\ldots,8\}}, \{\emptyset\})$

Induktionsanfang: $\Phi^2(\emptyset) = \Phi(\Phi(\emptyset)) = \Phi(\emptyset)$

Induktionsannahme: $\Phi^2(z) = \Phi(z)$

Induktionsschluss: $\forall\, j\in\{1,2,3,5,7,8\}$:

$$\Phi^2(s_j(z)) = \Phi(\Phi(s_j(z)) = \Phi(s_j(z))$$

$j=4$: $\Phi(s_j(z)) = \Phi(\Phi(s_j(z)) = \begin{cases} \Phi([\Phi(z) \square f[-]]) & , \Phi(z) \neq \emptyset \\ \Phi(f[-]) & , \Phi(z) = \emptyset \end{cases}$

$$= \begin{cases} \Phi([\Phi(z) \square f[- & , \Phi(z) \neq \emptyset \\ \Phi(f[- & , \Phi(z) = \emptyset \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \Phi([\Phi(z) \square f[\,) \square f[-\,]] & , \Phi(z) \neq \emptyset \\ f[-] & , \Phi(z) = \emptyset \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \Phi([\Phi(z)) \square f[-]] & , \Phi(z) \neq \emptyset \\ f[-] & , \Phi(z) = \emptyset \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \text{(nach *2) } [\Phi(\Phi(z)) \sqsupset f[-]] & , \Phi(z) \neq \phi \\ f[-] & , \Phi(z) = \phi \end{cases}$$

und die Behauptung folgt nach Induktionsannahme.

j=6 : ganz analog zum Fall j=4.

Jetzt beweisen wir das folgende wesentliche Lemma:

$\forall\, u,v \in Z$: $\Phi(uv) = \Phi(\Phi(u).\Phi(v))$

Beweis: durch Induktion nach u.

Induktionsanfang: $u=\phi \Rightarrow \Phi(v)=\Phi^2(v)=\Phi(\Phi(v))=\Phi(\phi\Phi(v))=$

$=\Phi(\Phi(\phi).\Phi(v))$

Induktionsannahme: Sei Behauptung richtig für ein bestimmtes u und dabei für alle v.

Induktionsschluss: zu zeigen :

$$\forall\, j \in \{1,\ldots,8\}: \Phi(s_j(u)v)=\Phi(\Phi(s_j(u).\Phi(v))$$

Beweis: durch Induktion nach v:

Induktionsanfang: $v=\phi$: $\forall j \in \{1,\ldots,8\}, \Phi(s_j(u)\phi)=\Phi(s_j(u))=\Phi^2(s_j(u))$

$=\Phi(\Phi(s_j(u))=\Phi(\Phi(s_j(u)).\Phi(\phi))$

Induktionsannahme: Sei Behauptung richtig für $s_i(u)$ und dabei ein bestimmt v, d.h.

$$\Phi(s_i(u).v) = \Phi(\Phi(s_i(u).\Phi(v))$$

Induktionsschluss: zu zeigen:

$$\forall\, j \in \{1,\ldots,8\}, \Phi(s_i(u).s_j(v))=\Phi(\Phi(s_i(u).\Phi(s_j(v))$$

$\forall\, j \in \{1,2,3,5,7,8\}$:

$\Phi(s_i(u).s_j(v))=\Phi(s_j(s_i(u).v))=\Phi(s_i(u).v))=$(nach Induktionsannahme)

$\Phi(\Phi(s_i(u))\Phi(v))=\Phi(\Phi(s_i(u)).\Phi(s_j(v)))$

Für j=4:

$$\Phi(s_i(u).s_j(v))=\begin{cases} [\Phi(s_i(u).v) \sqsupset f[-]] & , \Phi(s_i(u).v) \neq \phi \\ f[-] & , \Phi(s_i(u).v) = \phi \end{cases}$$

=(nach Induktionsannahme)

$$= \begin{cases} [\Phi(\Phi(s_i(u)).\Phi(v))\square f[-]], & \Phi(\Phi(s_i(u)).\Phi(v)) \neq \phi \\ f[-] & , \Phi(\Phi(s_i(u)).\Phi(v)) = \phi \end{cases}$$

$$= \begin{cases} [\Phi(\Phi(s_i(u)).\Phi(v))\square f[-]] & , \Phi(s_i(u)) \neq \phi \neq \Phi(v) \\ [\Phi^2(s_i(u))\square f[-]] & , \Phi(s_i(u)) \neq \phi = \Phi(v) \\ [\Phi^2(v)\square f[-]] & , \Phi(s_i(u)) = \phi \neq \Phi(v) \\ f[-] & , \Phi(s_i(u)) = \phi = \Phi(v) \end{cases}$$

$$\Phi(\Phi(s_i(u)).\Phi(s_j(v))) = \begin{cases} \Phi(\Phi(s_i(u)).[\Phi(v)\square f[-]]), & \Phi(s_i(u)) \neq \phi \neq \Phi(v) \\ \Phi(\Phi(s_i(u))\square f[-]) & , \Phi(s_i(u)) \neq \phi = \Phi(v) \\ \Phi([\Phi(v)\square f[-]]) & , \Phi(s_i(u)) = \phi \neq \Phi(v) \\ \Phi(f[-]) & , \Phi(s_i(u)) = \phi = \Phi(v) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} [\Phi(\Phi(s_i(u))[\Phi(v))\square f[-]] & , \Phi(s_i(u)) \neq \phi \neq \Phi(v) \\ [\Phi(\Phi(s_i(u))\square f[-]] & , \Phi(s_i(u)) \neq \phi = \Phi(v) \\ [\Phi([\Phi(v)\square f[-]] & , \Phi(s_i(u)) = \phi \neq \Phi(v) \\ f[-] & , \Phi(s_i(u)) = \phi = \Phi(v) \end{cases}$$

Jetzt wende man (*1), so folgt die Behauptung unmittelbar.

Jetzt können wir die wichtige folgende Folgerung beweisen:

$$\Phi([u\square v]) = \Phi([\Phi(u)\square\Phi(v)]) \qquad (1)$$

Beweis: $\Phi([u\square v]) = \Phi(\Phi([u\square)\Phi(v])) = \Phi(\Phi([u)\Phi(v)) = \Phi(\Phi(\Phi([)\Phi(u))\Phi(v))$

$= \Phi(\Phi(u).\Phi(v)) = \Phi(\Phi^3(u).\Phi^2(v))$

$= \Phi(\Phi(\Phi([).\Phi^2(u)).\Phi^2(v)) = \Phi(\Phi([\Phi(u)).\Phi(\Phi(v)))$

$= \Phi(\Phi([\Phi(u)\square)\Phi(\Phi(v)]))$

$= \Phi([\Phi(u)\square\Phi(v)])$

Es ist auch leicht zu sehen, dass:

$$\Phi(f[u]) = \Phi(f[\Phi(u)]) \qquad (2)$$

Beweis: $\Phi(f[u]) = \Phi(\Phi(f[)\Phi(u])) = \Phi(0\Phi(u)) = \Phi^2(u) = \Phi^3(u)$

$= \Phi(\Phi([)\Phi(\Phi(u))) = \Phi([\Phi(u)) = \Phi([\Phi(u)])$

$= \Phi(\Phi(f)\Phi([\Phi(u)])) = \Phi(f[\Phi(u)])$

Jetzt kommen wir endlich zu unserem gewünschten Satz über Standardworte. Beweis ist durch Induktion bzgl. der Kanten, die eine Peano-Algebra bilden:

Satz: Sei $(u,v,\varphi)\varepsilon K_1 \cup K_2 \cup K_3$, $u,v \neq \{e_1, f[e_0]\} \Rightarrow \Phi(u)=\Phi(v)$

Beweis: durch Induktion nach φ

Induktionsanfang: $\varphi=\alpha$

$\Phi([[u\square v]\square w\ ]) = \Phi(\Phi([u\square v])\Phi(w)) = \Phi(\Phi(\Phi(u).\Phi(v)).\Phi(w)) = \Phi(\Phi(uv).\Phi(w))$

$= \Phi(uv.w) = \Phi(u.vw) = \Phi(\Phi(u).\Phi(vw)) = \Phi(\Phi(u).\Phi([v\square w])) = \Phi([u\square[v\square w]])$

$\varphi=\delta$:

$\Phi(f[u\square v]) = \Phi(\Phi(f).\Phi([u\square v])) = \Phi^2(\Phi(u).\Phi(v)) = \Phi(\Phi^2(u).\Phi^2(v))$

$= \Phi(\Phi(\Phi(f[\,]).\Phi(u)).\Phi(\Phi(f[\,])\Phi(v)) = \Phi(\Phi(f[u).\Phi(f[v))$

$= \Phi(\Phi(f[u]).\Phi(f[v])) = \Phi(f[u]\square f[v])$

Für $\varphi \in \{\lambda, \rho, \zeta\}$, ist die Behauptung.

Induktionsannahme: $(u,v,\varphi)\varepsilon K_1 \cup K_2 \cup K_3 \Rightarrow \Phi(u) = \Phi(v)$

Induktionsschluss: $([u\square w],[v\square w],[\varphi\square 1\,])\varepsilon K_1 \cup K_2 \cup K_3 \Rightarrow$

$\Phi([u\square w]) = \Phi([\Phi(u)\square\Phi(w)]) = \Phi([\Phi(v)\square\Phi(w)]) = \Phi([v\ \square w])$.

Analog für $([w\square u],[w\square v],[1\square\varphi])\varepsilon K_1 \cup K_2 \cup K_3$

$(u,v,\varphi)\varepsilon K_1 \Rightarrow$

$\Phi(f[u]) = \Phi(f[\Phi(u)]) = \Phi(f[\Phi(v)]) = \Phi(f[v]) \Rightarrow$ Behauptung.

Folgerung: Wenn ein Weg von einem Wort zu einem anderen existiert, dann haben die beiden Worte dasselbe Standardwort

Beweis: direkt durch Induktion nach Anzahl der Kanten zwischen den Worten.

Das war unser Ziel.

Aus dieser Folgerung, folgt unmittelbar, dass:

Sei $w\varepsilon W_2$. Falls $w_{st.}$ existiert, dann muss es eindeutig sein.

Wir zeigen jetzt, dass es immer existiert.

2.20 Lemma: Für jedes Wort $w\varepsilon W_1 \cup W_2$ gibt es genau ein Standardwort "$w_{st.}$" und einen Weg von w nach $w_{st.}$ mit Kanten aus $K(\alpha,\beta)$, wobei $\#(w)=0$

$= \#_{e_1}(w)$, $w \neq w_{st.}$.

Beweis: durch Induktion nach $\#_{\sigma}(w)$. Wir betrachten den Fall $w \in W_2$.

Induktionsanfang: $\#_{\sigma}(w)=0 \Rightarrow w \in \{f[-], \sim\} \Rightarrow$ Behauptung.

Induktionsannahme: Sei Behauptung richtig für $\#_{\sigma}(w) \leq n$.

Induktionsschluss: $\#_{\sigma}(w)=n+1 \Rightarrow$ i) $w = [u \square v]$, $\#_{\sigma}(u) \leq n \geq \#_{\sigma}(v)$ V

ii) $w = f[u \square v]$, $\#_{\sigma}(u) \leq n \geq \#_{\sigma}(v)$.

i) Nach Induktionsannahme $\exists_1 u_{st.} \wedge \exists_1 v_{st.}$ und Wege von u nach $u_{st.}$, von v nach $v_{st.}$, deren Kanten sind:

$(u, u_1, \varphi_1), (u_1, u_2, \varphi_2), \ldots, (u_s, u_{st.}, \varphi_{s+1}) \in K(\alpha, \delta)$, und:

$(v, v_1, \psi_1), (v_1, v_2, \psi_2), \ldots, (v_t, v_{st.}, \psi_{t+1}) \in K(\alpha, \delta) \Rightarrow \exists$ ein Weg mit Kanten aus $K(\alpha, \delta)$, von $[u \square v]$ nach $[u_{st.} \square v_{st.}]$, deren Kanten sind:

$([u \square v], [u_1 \square v], [\varphi_1 \square 1]), ([u_1 \square v], [u_2 \square v], [\varphi_2 \square 1]), \ldots,$

$([u_s \square v], [u_{st.} \square v], [\varphi_{s+1} \square 1]), ([u_{st.} \square v], [u_{st.} \square v_1], [1 \square \psi_1]),$

$([u_{st.} \square v_1], [u_{st.} \square v_2], [1 \square \psi_2]), \ldots, ([u_{st.} \square v_t], [u_{st.} \square v_{st.}], [1 \square \varphi_{t+1}])$

Jetzt wende man $\varkappa$ auf $[u_{st.} \square v_{st.}], v_{st.} = [v' \square v"]$, wobei $v" = \sim Vv" = f[-]$ erhält man: $[[u_{st.} \square v'] \square v"]$, $v" = \sim$ V $v" = f[-]$. Nach Induktionsannahme gibt es genau ein Standardwort zum Wort $[u_{st.} \square v']$ und einen Weg von $[u_{st.} \square v']$ nach $[u_{st.} \square v]_{st.}$. Nach der letzten Folgerung folgt die Eindeutigkeit.

ii) Falls $w = f[u \square v]$, $\#_{\sigma}(u) \leq n \geq \#_{\sigma}(v)$, wende man δ, erhält $[f[u] \square f[v]]$, dann geht das Verfahren genau wie bei i). Also folgt die Behauptung.

Die Zusammenfassung der Lemmas 2.18 und 2.20 ergibt:

2.21 Satz: Für jedes Wort $w \in W_1 \cup W_2$ gibt es genau ein Standardwort "$w_{st.}$" und einen Weg von w nach $w_{st.}$, mit Kanten aus $K(\alpha, \lambda, \rho, \delta, \zeta)$, wobei $w \neq w_{st.}$, $\#_{-}(w) + \#_{\sim}(w) \geq 1$

2.22 Bemerkung: $w \in W_1 \cup W_2 \Rightarrow Rg(w) \geq 0$, mit $Rg(w)=0 \Leftrightarrow w \in \{w \mid w=w_{st.}\} \cup \{e_o, e_1\}$

Beweis: Wir beweisen zunächst: $w \in W_1 \cup W_2 \Rightarrow Rg(w) \geq 0$. Beweis ist durch Induktion nach $\#_\alpha(w)$.

Induktionsanfang: $\#_\alpha(w)=0 \Rightarrow w=- \vee w=e_o \vee w=\sim \vee w=e_1 \vee w=f[-] \vee w=f[e_o]$

$$Rg(-) = Rg(e_o) = Rg(\sim) = Rg(e_1) = 0$$

$$Rg(f[-]) = 0 \ , \ Rg(f[e_o]) = 1$$

Induktionsannahme: Sei Behauptung richtig für $\#_\alpha(w) \leq n$.

Induktionsschluss: $\#_\alpha(w)=n+1 \Rightarrow$ i) $w=[u \square v], \#_\alpha(u) \leq n \geq \#_\alpha(v)$ oder

ii) $w=f[u \square v], \#_\alpha(u) \leq n \geq \#_\alpha(v)$

i) $Rg(w)=Rg([u \square v])=Rg(u)+Rg(v)+\#_\alpha(v)(\#_{e_o}([u \square v])+\#_{e_1}([u \square v])+1)$

$+\#_{e_o}([u \square v])+\#_{e_1}([u \square v]) \Rightarrow Rg(w) \geq 0.$

ii) $Rg(w)=Rg(f[u \square v])=Rg([u \square v])+\#_{e_o}([u \square v])+\#_\alpha([u \square v]) \geq 1$

Wir zeigen jetzt, dass: $Rg(w)=0 \Leftrightarrow w \in \{w \mid w=w_{st.}\} \cup \{e_o, e_1\}$

"$\Leftarrow$": $w \in \{w \mid w=w_{st.}\}$. Beweis durch Induktion nach $\#_\alpha(w)$:

Induktionsanfang: $\#_\alpha(w)=0 \Rightarrow w=- \vee w=\sim \vee w=f[-] \Rightarrow Rg(w)=0$

Induktionsannahme: Sei Behauptung richtig für alle $w_{st.}$, mit $\#_\alpha(w_{st.}) \leq n$

Induktionsschluss: $w=w_{st.}$, $\#_\alpha(w)=n+1$:

$w=w_{st.}=[w'_{st.} \square u]$, wobei $u \in \{-, \sim, f[-]\} \Rightarrow$

$Rg(w)=Rg(w'_{st.})+Rg(u)+(\#_\alpha(u)+1)(\#_{e_o}([u \square w'_{st.}])+\#_{e_1}([w'_{st.} \square u])+1)-1$

$=0+0+(0+1)(0+0+1)-1=0$

"$\Rightarrow$": Sei $Rg(w)=0 \wedge w \notin \{e_o, e_1\} \wedge w \notin \{w \mid w=w_{st.}\}$

Entweder ist $\#_-(w)+\#_\sim(w) = 0$, oder $\#_-(w)+\#_\sim(w) > 0$

Falls $\#_-(w)+\#_\sim(w)=0, w \notin \{e_o, e_1\} \Rightarrow w=[u \square v] \wedge [\#_{e_o}(u)+\#_{e_1}(u) \geq 1 \wedge \#_{e_o}(v)+\#_{e_1}(v) \geq 1]$

$\Rightarrow Rg(w) \geq 1$: Widerspruch zu $Rg(w) = 0$.

Falls $\#_-(w)+\#_\sim(w) > 0 \Rightarrow$ (nach Satz 2.21) $\exists_1$ Standardwort $w_{st.}$ mit $Rg(w_{st.})=0$, und es gibt einen Weg von w nach $w_{st.}$, mit Kanten aus $K(\alpha, \lambda, \rho, \delta, \zeta)$. Aber alle solche Kanten reduzieren den Rang: Widerspruch zu $Rg(w_{st.})=0$. Also die Behauptung.

Jetzt kommen wir zum wesentlichen Satz:

2.23 Satz: Je zwei Wege mit Kanten aus $K(\alpha,\lambda,\rho,\delta,\zeta)$ von $w\varepsilon W_2$ nach $w_{st.}$, mit $\overline{\#}_{-}(w)+\#_{\sim}(w) > 1$, haben gleiche Bilder.

Beweis: durch Induktion nach Rg(w)

Induktionsanfang: $Rg(w)=0 \Rightarrow$ (nach 2.22) $w\varepsilon\{w|w=w_{st.}\}\cup\{e_o,e_1\}$

$\Rightarrow$ Behauptung.

Induktionsannahme: Sei Behauptung richtig für $Rg(w) \leq n$

Induktionsschluss: $Rg(w) = n+1$: ganz analog zum Schluss beim Satz 1.23, mit 2.17 statt 1.17.

2.24 Hauptsatz: Seien P und Q Objekte von $\mathcal{D}$, die sich mit n Kopien von $A\varepsilon\mathfrak{C}$ und Kopien von I und J und m Kopien von $B\varepsilon\mathcal{D}$ durch Anwendung von Tensorprodukten bzgl. $\mathfrak{C}$ oder $\mathcal{D}$ und durch Anwendungen des Funktors $\mathfrak{F}$ darstellen lassen, wobei in beiden Objekten die Reihenfolge der A und B dieselbe sei. Genauer: Seien $P = u_B$, und $B= v_B$ Bilder von zwei Worten u und v aus W_2 bei Einsetzen von A und B, die ein gemeinsames Standardwort haben, dann gibt es genau einen Morphismus $\varphi: P \longrightarrow Q$, der sich aus Morphismen zusammensetzt, die sich als Tensorprodukte von $\alpha,\lambda,\rho,\delta,\zeta,\bar{\alpha}^1,\bar{\lambda}^1,\bar{\rho}^1,\bar{\delta}^1,\bar{\zeta}^1$, und Identitäten darstellen lassen, genauer: so dass $\varphi: P \longrightarrow Q$ Bild eines Weges von u nach v beim Einsetzen von A und B ist.

(Angabe wie früher: $(\mathfrak{C},\otimes,I)$, $(\mathcal{D},\otimes,J)$ zwei monoidale Kategorien, $A\varepsilon Ob(\mathfrak{C})$, $B\varepsilon Ob(\mathcal{D})$, $\mathfrak{F}:\mathfrak{C}\longrightarrow\mathcal{D}$ ein monoidaler Funktor.)

Beweis: analog zu 1.24.

2.25 Bemerkung: Für $w \in W_2$, betrachten wir den Fall $\#_-(w)+\#_\sim(w) = 0$

Lemma: Gegeben $e_1 \neq w \in W_2 \wedge \#_-(w)+\#_\sim(w) = 0 \wedge \#_{e_0}(w)+\#_{e_1}(w)=n$, dann existiert ein Weg von w nach e_1 mit Kanten aus $K(\lambda,\delta,\zeta)$

Beweis: durch Induktion nach n.

Induktionsanfang: $n=1 \Rightarrow w=f[e_0]$, wir haben den Weg $(f[e_0],e_1,\zeta)$

Induktionsannahme: Sei Behauptung richtig für $n \leq m$

Induktionsschluss: $n=m+1$: Es folgt: entweder i) $w=[u \square v]$

oder ii) $w=f[u \square v]$,

i) $w =[u \square v], \#_{e_0}(u)+\#_{e_1}(u) \leq n \wedge \#_{e_0}(v)+\#_{e_1}(v) \leq n$

$\Rightarrow$ (nach Induktionsannahme) $\exists$ ein Weg von u nach e_1, mit Kanten aus $K(\lambda,\delta,\zeta)$ (δ ist nicht notwendig), und $\exists$ ein Weg von v nach e_1, mit Kanten aus $K(\lambda,\delta,\zeta)$ (wieder ist δ nicht notwendig). Wie beim 2.18 existiert ein Weg von $[u \square v]$ nach $[e_1 \square e_1]$ nach e_1.

ii) $w=f[u \square v], \#_{e_0}(u)=\#_{e_1}(v)=0 \wedge \#_{e_0}(u) \leq n \geq \#_{e_1}(v)$. Man verwende δ, bekommt $[f[u] \square f[v]]$, dann analog zu i). Also die Behauptung.

Jetzt, kann man Satz 2.23 anwenden, mit e_1 statt w_{st}.

§3 Kohärenz der $\mathfrak{C}$-Funktoren.

Sei $\mathfrak{C}$ eine monoidale Kategorie.

Seien $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ zwei $\mathfrak{C}$-Kategorien. Ein Funktor $\mathfrak{F}:\mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{N}$ heisst $\mathfrak{C}$-Funktor (nach[12]) genau dann wenn: $\exists\ \xi$ funktorieller Isomorphismus, so dass:

$\forall\ M \varepsilon Ob(\mathfrak{M})$, $\forall\ C \varepsilon Ob(\mathfrak{C}): \xi: \mathfrak{F}(M \otimes C) \cong \mathfrak{F}(M) \otimes C$, so dass die folgenden Diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{F}(M\otimes(C\otimes D)) & \xrightarrow{\ \xi\ } & \mathfrak{F}(M)\otimes(C\otimes D) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathfrak{F}(\beta)} & & \downarrow{\scriptstyle \beta} \\ \mathfrak{F}((M\otimes C)\otimes D) & \xrightarrow{\ \xi\ } \mathfrak{F}(M\otimes C)\otimes D \xrightarrow{\ \xi\otimes 1\ } & (\mathfrak{F}(M)\otimes C)\otimes D \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{F}(M\otimes I) & \xrightarrow{\ \xi\ } & \mathfrak{F}(M)\otimes I \\ & {\scriptstyle \mathfrak{F}(\sigma)}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \sigma} & \\ & \mathfrak{F}(M) & \end{array}$$

kommutieren.

Ähnlich zum Abschnitt 2, "Kohärenz der monoidalen Funktoren", zeigen wir, dass die obigen Voraussetzungen "Kohärenzbedingungen" sind. Wir werden hier nicht alle Details immer zitieren, so dass der Leser nicht gelangweilt wird!

3.1 Definition: Seien $M := \{[\ ,\ ], \sqcup, e_o, -, \sim, \simeq,\ f\}$

$Z := \{\phi\} \cup M \cup M^2 \cup \ldots$

W_1 sei die kleinste Teilmenge von Z, so dass:

i) $e_o \varepsilon W_1 \wedge -\varepsilon W_1$

ii) $u \varepsilon W_1 \wedge v \varepsilon W_1 \Rightarrow [u \sqcup v] \varepsilon W_1$

W_2 sei die kleinste Teilmenge von Z, so dass:

i') $\sim \varepsilon W_2$

ii') $u \varepsilon W_2 \wedge v \varepsilon W_1 \Rightarrow [u \sqcup v] \varepsilon W_2$

W_3 sei die kleinste Teilmenge von Z, so dass:

i") $\simeq \varepsilon W_3$

ii") $u \varepsilon W_3 \wedge v \varepsilon W_1 \Rightarrow [u \square v] \varepsilon W_3$

iii") $u \varepsilon W_2 \Rightarrow f[u] \varepsilon W_3$

W_1 (bzw. W_2, bzw. W_3) heisst die Menge aller Worte bzgl. $\mathfrak{C}$ (bzw. $\mathfrak{R}$, bzw. $\mathfrak{N}$)

3.2 Definition: Seien:

$T := \{[,], \square, 1, \alpha, \lambda, \rho, \beta, \sigma, \bar{\alpha}^1, \bar{\lambda}^1, \bar{\rho}^1, \bar{\beta}^1, \bar{\sigma}^1, \xi, \bar{\xi}^1\}$

$Y := \{\phi\} \cup T \cup T^2 \cup \ldots$

$k_\alpha := \{([u \square [v \square w]], [[u \square v] \square w], \alpha) \mid u, v, w \varepsilon W_1\}$

$k_\lambda := \{([e_o \square u], u, \lambda) \mid u \varepsilon W_1\}$

$k_\rho := \{([u \square e_o], u, \rho) \mid u \varepsilon W_1\}$

$k_{\bar{\alpha}^1} := \{([[u \square v] \square w], [u \square [v \square w]], \bar{\alpha}^1) \mid u, v, w \varepsilon W_1\}$

$k_{\bar{\lambda}^1} := \{(u, [e_o \square u], \lambda) \mid u \varepsilon W_1\}$

$k_{\bar{\rho}^1} := \{(u, [u \square e_o], \rho) \mid u \varepsilon W_1\}$

$l_\beta := \{([u \square [v \square w]], [[u \square v] \square w], \beta) \mid u \varepsilon W_2 \wedge v, w \varepsilon W_1\}$

$l_\sigma := \{([u \square e_o], u, \sigma) \mid u \varepsilon W_2\}$

$l_{\bar{\beta}^1} := \{([[u \square v] \square w], [u \square [v \square w]], \bar{\beta}^1) \mid u \varepsilon W_2, v, w \varepsilon W_1\}$

$l_{\bar{\sigma}^1} := \{(u, [u \square e_o], \bar{\sigma}^1) \mid u \varepsilon W_2\}$

$m_\beta := \{([u \square [v \square w]], [[u \square v] \square w], \beta) \mid u \varepsilon W_3 \wedge v, w \varepsilon W_1\}$

$m_\sigma := \{([u \square e_o], u, \sigma) \mid u \varepsilon W_3\}$

$m_{\bar{\beta}^1} := \{([[u \square v] \square w], [u \square [v \square w]], \bar{\beta}^1) \mid u \varepsilon W_3, v, w \varepsilon W_1\}$

$m_{\bar{\sigma}^1} := \{(u, [u \square e_o], \bar{\sigma}^1) \mid u \varepsilon W_3\}$

$m_\xi := \{(f[u \square v], [f[u] \square v], \xi) \mid u \varepsilon W_2, v \varepsilon W_1\}$

$m_{\bar{\xi}^1} := \{([f[u] \square v], f[u \square v], \bar{\xi}^1) \mid u \varepsilon W_2, v \varepsilon W_1\}$

Seien $\psi_i \varepsilon \{\alpha, \lambda, \rho, \bar{\alpha}^1, \bar{\lambda}^1, \bar{\rho}^1\}$, $i \varepsilon N$

$\varphi_j \varepsilon \{\beta, \sigma, \bar{\beta}^1, \bar{\sigma}^1\}$, $j \varepsilon N$

$\theta_k \varepsilon \{\xi, \bar{\xi}^1\}$, $k \varepsilon N$

$K(k_{\psi_i})$ sei die kleinste Teilmenge von $W_1 \times W_1 \times Y$, die k_{ψ_i} enthält, mit:

$$(u,v,\varphi) \in K(k_{\psi_i}) \Rightarrow \forall w \in W_1 : ([u \square w],[v \square w],[\varphi \square 1]) \in K(k_{\psi_i}) \wedge ([w \square u],[w \square v],[1 \square \varphi]) \in K(k_{\psi_i})$$

$K(l_{\psi_i})$ sei die kleinste Teilmenge von $W_2 \times W_2 \times Y$, mit:

i) $(u,v,\varphi) \in K(k_{\psi_i}) \Rightarrow \forall w \in W_2 : ([w \square u],[w \square v],[1 \square \varphi]) \in K(l_{\psi_i})$

ii) $(u,v,\varphi) \in K(l_{\psi_i}) \Rightarrow \forall w \in W_1 : ([u \square w],[v \square w],[\varphi \square 1]) \in K(l_{\psi_i})$

$K(m_{\psi_i})$ sei die kleinste Teilmenge von $W_3 \times W_3 \times Y$, mit:

i) $(u,v,\varphi) \in K(m_{\psi_i}) \Rightarrow \forall w \in W_1 : ([u \square w],[v \square w],[\varphi \square 1]) \in K(m_{\psi_i})$,

ii) $(u,v,\varphi) \in K(k_{\psi_i}) \Rightarrow \forall w \in W_3 : ([w \square u],[w \square v],[1 \square \varphi]) \in K(m_{\psi_i})$,

ii) $(u,v,\varphi) \in K(l_{\psi_i}) \Rightarrow (f[u],f[v],f[\varphi]) \in K(m_{\psi_i})$

$K(l_{\varphi_j})$ sei die kleinste Teilmenge von $W_2 \times W_2 \times Y$, die l_{φ_j} enthält, mit:

$(u,v,\varphi) \in K(l_{\varphi_j}) \Rightarrow \forall w \in W_1 : ([u \square w],[v \square w],[\varphi \square 1]) \in K(l_{\varphi_j})$.

$K(m_{\varphi_j})$ sei die kleinste Teilmenge von $W_3 \times W_3 \times Y$, die m_{φ_j} enthält, mit:

i) $(u,v,\varphi) \in K(m_{\varphi_j}) \Rightarrow \forall w \in W_1 : ([u \square w],[v \square w],[\varphi \square 1]) \in K(m_{\varphi_j})$,

ii) $(u,v,\varphi) \in K(l_{\varphi_j}) \Rightarrow (f[u],f[v],f[\varphi]) \in K(m_{\varphi_j})$.

$K(m_{\theta_k})$ sei die kleinste Teilmenge von $W_3 \times W_3 \times Y$, die m_{θ_k} enthält, mit:

$(u,v,\varphi) \in K(m_{\theta_k}) \Rightarrow \forall w \in W_1 : ([u \square w],[v \square w],[\varphi \square 1]) \in K(m_{\theta_k})$

Eine Kante ist ein Element in $K(k_{\psi_i})$, oder in $K(l_{\psi_i})$, oder in $K(m_{\psi_i})$, oder in $K(l_{\varphi_j})$, oder in $K(m_{\varphi_j})$, oder in $K(m_{\theta_k})$, das ist ein Tripel, die dritte Komponente in diesem Tripel heisst Pfeilkante.

$$K(\psi_i) := K(k_{\psi_i}) \cup K(l_{\psi_i}) \cup K(m_{\psi_i}),$$

$$K(\varphi_j) := K(l_{\varphi_j}) \cup K(m_{\varphi_j}),$$

$$K(\theta_k) := K(m_{\theta_k})$$

$$K(\psi_1,\ldots,\psi_r,\varphi_1,\ldots,\varphi_s,\theta_1,\ldots,\theta_k) := K(\psi_1) \cup \ldots \cup K(\psi_r) \cup K(\varphi_1) \cup \ldots \cup K(\varphi_s) \cup K(\theta_1) \cup \ldots \cup K(\theta_t).$$

Mit $\overline{K}(k_{\psi_i})$ bzw. $\overline{K}(l_{\psi_i})$ bzw. $\overline{K}(m_{\psi_i})$ bzw. $\overline{K}(l_{\varphi_j})$ bzw. $\overline{K}(m_{\varphi_j})$ bzw. $\overline{K}(m_{\theta_k})$ meinen wir die Menge aller Pfeilkanten in $K(k_{\psi_i})$ bzw. $K(l_{\psi_i})$ bzw. $K(m_{\psi_i})$ bzw. $K(l_{\varphi_j})$ bzw. $K(m_{\varphi_j})$ bzw. $K(m_{\theta_k})$.

Die Definitionen 1.3 und 1.4 ,und das Lemma 1.5 werden hier unter den Nummern 3.3,3.4 und 3.5 stehen.

3.6 Hilfssatz: $w\varepsilon W_3 \Rightarrow \#_l(w)-\#_j(w)=0$.

Beweis:ganz analog zu 2.6.Im Anfang der Induktion : $\#_b(w)=0 \Rightarrow w=\sim$ V $w=f[\sim] \Rightarrow$ Behauptung.

Die Lemmas 2.7,2.8 und 2.9 werden hier wieder kopiert,mit den Nummern 3.7,3.8 und 3.9. In 3.8:$w=[u\square v], w\varepsilon W_1 \cup W_2 \cup W_3$;$w=f[u], u\varepsilon W_2$

3.10 Hilfssatz: $w\varepsilon W_3 \Rightarrow \#_l(s_n(w))-\#_j(s_n(w)) > 0$,falls $f\neq s_n(w)\neq\phi, n > 0$.

Beweis: genau wie bei 2.10.Beim Schluss haben wir:

1) $w =\sim \Rightarrow s_n(w) = \phi$

2) $w =f[\sim] \Rightarrow \#_l(s_n(w))-\#_j(s_n(w)) = 1$,$n\varepsilon\{1,2\}$ ^

$s_n(w) = f$,$n=3$ ^

$s_n(w) = \phi$,$n>3$

3) $w =f[u]$,$u\varepsilon W_2$:genau wie bei 2.10) 5)

4) $w =f[u\square v]$: genau wie bei 1.10.

3.11 Satz:i) $w\varepsilon W_3, w=[u\square v]=[u'\square v'], u,u'\varepsilon W_3$,$v,v'\varepsilon W_1 \Rightarrow u=u' \wedge v=v'$

ii) $f[w]=f[w']$,$w,w'\varepsilon W_2 \Rightarrow w=w'$

Beweis:i) ganz genau wie bei 2.11,mit $f\varepsilon W_3$ statt $f\varepsilon W_2$

ii) wie bei 2.11) iii).

3.12 Lemma und Definition: $(X,S,\hat{X})$,wobei $W=(W_1,W_2,W_3), S=(s_1,s_2,s_3,s_4)$ $\hat{X}=(e_o,-,\sim,\simeq)$,

$s_1 : W_1 \times W_1 \longrightarrow W_1$, $s_2 : W_2 \times W_1 \longrightarrow W_2$, $s_3 : W_3 \times W_1 \longrightarrow W$

$(u,v) \longmapsto [u\square v]$ $(u,v) \longmapsto [u\square v]$ $(u,v) \longmapsto [u$

$s_4 : W_2 \longrightarrow W_3$

$u \longmapsto f[u]$

ist eine Peano-Algebra vom Typ $(3,4,4,\alpha,\beta)$, wobei $\alpha(1)=(1,1,1)$, $\alpha(2)=(2,1,2)$, $\alpha(3)=(3,1,3)$, $\alpha(4)=(2,3)$, $\beta(1)=\beta(2)=1$, $\beta(3)=2$, $\beta(4)=3$.

Beweis: Es ist klar, dass $(X,S,\hat{X})$ Algebra ist. Zu zeigen: Es ist Peano-Algebra.

$Bi(s_3)\cap Bi(s_4)\neq\phi \Rightarrow \exists u\varepsilon W_3, v\varepsilon W_1, u'\varepsilon W_2$: $[u\square v]=f[u'] \Rightarrow u\square v = [u'$.

Falls $u=\simeq \Rightarrow u'= \square u$: widerspruch, da $\square u$ kein Wort ist.

Falls $u=\simeq \Rightarrow u'= z\square u$: widerspruch, da $z\square u$ kein Wort ist. $(z\varepsilon Z)$

$Bi(s_1)\cap Bi(s_2)=\phi$, $Bi(s_1)\cap Bi(s_3)=\phi$, $Bi(s_1)\cap Bi(s_4)=\phi$, $Bi(s_2)\cap Bi(s_3)=\phi$

$Bi(s_2)\cap Bi(s_4)=\phi$: klar.

s_1, s_2, s_3, s_4: injektiv: schon in 3.11 bewiesen.

Es ist auch leicht zu sehen, dass:

$\forall\, u,v\varepsilon W_1$: $e_o \neq [u\square v]^{\frown} \neq [u\square v]$,

$\forall\, u\varepsilon W_2$, $v\varepsilon W_1$: $\sim \neq [u\square v]$,

$\forall\, u\varepsilon W_3$, $v\varepsilon W_1$: $\simeq \neq [u\square v]$,

$\forall\, u\ W_2$: $\simeq \neq f[u]$

Sei $A(u)$ eine Aussage über $u\varepsilon W_1 \cup W_2 \cup W_3$, so dass gelten:

(1) $A(e_o), A(-), A(\sim), A(\simeq)$

(2) Gelten $A(u_1), A(u_1'), A(u_2), A(u_3), u_1, u_1' \varepsilon W_1$, $u_2\varepsilon W_2$, $u_3\varepsilon W_3$, so gelten auch:

$A([u_1\square u_1'])$, $A([u_2\square u_1])$, $A([u_2\square u_1'])$, $A([u_3\square u_1])$, $A([u_3\square u_1'])$, $A(f[u_2])$.

Zu zeigen: $\forall\, u\varepsilon W_1\cup W_2\cup W_3$: $A(u)$

Beweis: Wir betrachten $\{u\varepsilon W_1\cup W_2\cup W_3 \mid A(u)\} = \{u\varepsilon W_1 \mid A(u)\} \cup \{u\varepsilon W_2 \mid A(u)\} \cup \{u\varepsilon W_3 \mid A(u)\}$

$\subset W_1\cup W_2\cup W_3$.

$\{u\varepsilon W_1 \mid A(u)\}$ erfüllt i) (Definition 3.1) nach (1), und erfüllt ii) (Definition 3.1) nach (2), aber W_1 ist kleinste Teilmenge von Z, mit solchen Eigenschaften $\Rightarrow \{u\varepsilon W_1 \mid A(u)\} = W_1$. Analog: $\{u\varepsilon W_2 \mid A(u)\} = W_2$ ^ $\{u\varepsilon W_3 \mid A(u)\} = W_3$. Also, folgt die Behauptung

Wir definieren jetzt:

$$g_1 : W_1 \times N \times W_1 \times N \longrightarrow N$$
$$(u,r,v,s) \longmapsto r+s+(\#_{\square}(v)+1)(\#_{e_0}([u\square v])+1)-1$$
$$g_2 : W_2 \times N \times W_1 \times N \longrightarrow N$$
$$(u,r,v,s) \longmapsto r+s+(\#_{\square}(v)+1)(\#_{e_0}([u\square v])+1)-1$$
$$g_3 : W_3 \times N \times W_1 \times N \longrightarrow N$$
$$(u,r,v,s) \longmapsto r+s+(\#_{\square}(v)+1)(\#_{e_0}([u\square v])+1)-1$$
$$g_4 : W_2 \times N \longrightarrow N$$
$$(u,r) \longmapsto r+\#_{e_0}(u)+\#_{\square}(u).$$

Also folgt wieder nach 0.14, dass es genau eine Abbildung "Rg" (Rang) gibt, $Rg: W_1 \cup W_2 \cup W_3 \longrightarrow N$, so dass:

$Rg(e_o) = Rg(-) = Rg(\sim) = Rg(\approx) = 0$,

$\forall\, u,v \in W_1: Rg([u\square v]) = Rg(s_1(u,v)) = g_1(u, Rg(u), v, Rg(v))$
$= Rg(u)+Rg(v)+(\#_{\square}(v)+1)(\#_{e_0}([u\square v])+1)-1$

$\forall\, u \in W_2,\ v \in W_1: Rg([u\square v]) = Rg(s_2(u,v)) = g_2(u, Rg(u), v, Rg(v))$
$= Rg(u)+Rg(v)+(\#_{\square}(v)+1)(\#_{e_0}([u\square v])+1)-1$

$\forall\, u \in W_3,\ v \in W_1: Rg([u\square v]) = Rg(s_3(u,v)) = g_3(u, Rg(u), v, Rg(v))$
$= Rg(u)+Rg(v)+(\#_{\square}(v)+1)(\#_{e_0}([u\square v])+1)-1$

$\forall\, u \in W_2: Rg(f[u]) = Rg(s_4(u)) = g_4(u, Rg(u)) = Rg(u)+\#_{e_0}(u)+\#_{\square}(u)$.

3.13 <u>Lemma</u>: i) $(u,v,\varphi) \in K(\alpha,\beta,\xi) \Rightarrow$ a) $\#_{\square}(u) = \#_{\square}(v)$
b) $\#_{e_0}(u) = \#_{e_0}(v)$

ii) $(u,v,\varphi) \in K(\lambda,\rho,\sigma) \Rightarrow$ a) $\#_{\square}(u) = \#_{\square}(v)+1$
b) $\#_{e_0}(u) = \#_{e_0}(v)+1$

Beweis: direkt durch Induktion nach $\#_{\square}(\varphi)$

3.14 <u>Satz</u>: $(u,v,\varphi) \in K(\alpha,\lambda,\rho,\beta,\sigma,\xi) \Rightarrow Rg(v) < Rg(u)$

Beweis: nur zu zeigen: $(u,v,\varphi) \in K(\xi) \Rightarrow Rg(v) < Rg(u)$. Beweis durch Induktion nach $\#_{\square}(\varphi)$.

Induktionsanfang: $\#_{\square}(\varphi) = 0 \Rightarrow \varphi = \xi$

$Rg(f[u\square v]) = Rg([u\square v]) + \#_{e_0}([u\square v]) + \#_{\square}([u\square v])$

$=Rg(u)+Rg(v)+(\#_{\square}(v)+1)(\#_{\ell_0}([u\square v])+1)-1+\#_{\ell_1}(u)+\#_{\ell_0}(v)+\#_{\square}(u)+\#_{\square}(v)+1$

$=Rg(u)+Rg(v)+\#_{\square}(v).\#_{\ell_1}(u)+\#_{\square}(v)\#_{\ell_0}(v)+2\#_{\ell_1}(u)+2\#_{\ell_0}(v)+\#_{\square}(u)+2\#_{\square}(v)+1$

$Rg([f[u]\square v])=Rg(f[u])+Rg(v)+(\#_{\square}(v)+1)(\#_{\ell_1}([f[u]\square v])+1)-1$

$=Rg(u)+Rg(v)+\#_{\square}(v)\#_{\ell_1}(u)+\#_{\square}(v)\#_{\ell_0}(v)+2\#_{\ell_1}(u)+\#_{\square}(u)+$

$+\#_{\ell_1}(v)+\#_{\square}(v).$

$\Rightarrow Rg(f[u\square v])-Rg([f[u]\square v])=\#_{\ell_1}(v)+\#_{\square}(v)+1>0$

Induktionsannahme: Sei Behauptung richtig wenn $\#_{\square}(\varphi)\leqslant n$.

Induktionsschluss: $\#_{\square}(\varphi)=n+1\Rightarrow\varphi=\psi\square 1\ \vee\ \varphi=1\square\psi,\psi\in\overline{K}(\xi)$

Wir betrachten $\varphi=\psi\square 1$: $(u,v,\varphi)=([p\square w],[q\square w],[\psi\square 1])$

$Rg([p\square w])=Rg(p)+Rg(w)+(\#_{\square}(w)+1)(\#_{\ell_0}([p\square w])+1)-1$

$Rg([q\square w])=Rg(q)+Rg(w)+(\#_{\square}(w)+1)(\#_{\ell_0}([q\square w])+1)-1$

$\Rightarrow$ (nach Induktionsannahme und 3.13)die Behauptung.

3.15 Definition: Ein Weg von u nach v $(u,v\in W_3)$ ist eine Folge von Kanten aus $K(m_{\ell_i})$, oder aus $K(m_{\varphi_j})$, oder aus $K(m_{\vartheta_k})$:
$(u,x_1,\varphi_1),(x_1,x_2,\varphi_2),\ldots,(x_n,v,\varphi_{n+1})$.

3.16 Die Bilder: Gegeben $\mathfrak{C}$ eine monoidale Kategorie, $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ zwei $\mathfrak{C}$-Kategorien, $\mathfrak{F}:\mathfrak{M}\longrightarrow\mathfrak{N}$ ein $\mathfrak{C}$-Funktor, $X\in Ob(\mathfrak{M})$, $Y\in Ob(\mathfrak{N})$, und $B\in Ob(\mathfrak{C})$

Die Technik ist ganz ähnlich zur Technik in 1.16 oder 2.16:

Da die Worte eine Peano-Algebra bilden, definiert man die g's, und existiert genau eine Abbildung $h:W_1\cup W_2\cup W_3\longrightarrow Ob(\mathfrak{C})\cup Ob(\mathfrak{M})\cup Ob(\mathfrak{N})$, so dass:

i) $h(e_0)=I$, $h(-)=B$, $h(\sim)=X$, $h(\approx)=Y$,

ii) $\forall\ u,v\in W_1$: $h([u\square v])=h(u)\otimes h(v):=u_B\otimes v_B$,

$\forall\ u\in W_2,v\in W_1$: $h([u\square v])=h(u)\otimes h(v):=u_X\otimes u_B$, $h(f[u])=\mathfrak{F}(u_X)$

$\forall\ u\in W_3,v\in W_1$: $h([u\square v])=h(u)\otimes h(v):=u_Y\otimes u_B$.

Die Kanten bilden eine Peano-Algebra, man definiert die geeigneten g's, also existiert genau eine Abbildung h_1;

$h_1:K(k_{\psi_i})\cup K(l_{\psi_i})\cup K(m_{\psi_i})\cup K(l_{\varphi_j})\cup K(m_{\varphi_j})\cup K(m_{\vartheta_k})\longrightarrow\mathfrak{I}\cup\mathfrak{M}\cup\mathfrak{N}$,

definiert durch:

$\forall \varphi \varepsilon \{\alpha, \beta, \lambda, \rho, \sigma, \bar{\alpha}^1, \bar{\beta}^1, \bar{\lambda}^1, \bar{\rho}^1, \bar{\sigma}^1, \xi, \bar{\xi}^1\}$: $h_1(u,v,\varphi) := (h(u), h(v), \varphi)$,

$\forall\ (u,v,\varphi) \varepsilon K(k_{\psi_i}) \cup K(l_{\psi_i}) \cup K(m_{\psi_i}) \cup K(l_{\varphi_j}) \cup K(m_{\varphi_j}) \cup K(m_{\rho_k}), \forall w \varepsilon W_1 \cup W_2 \cup W_3$:

$h_1([u \square w], [v \square w], [\varphi \square 1]) := (h([u \square w]), h([v \square w]), \varphi \otimes 1)$, (so lange die Kante $([u \square w], [v \square w], [\varphi \square 1])$ definiert ist),

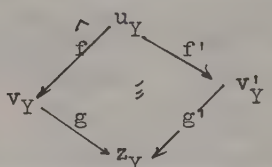
$h_1([w \square u], [w \square v], [1 \square \varphi]) := (h([w \square u]), h([w \square v]), 1 \otimes \varphi)$, (so lange die Kante $([w \square u], [w \square v], [1 \square \varphi])$ definiert ist),

$\forall\ (u,v,\varphi) \varepsilon K(l_{\psi_i}) \cup K(l_{\varphi_j})$:

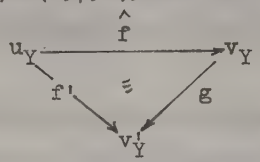
$h_1(f[u], f[v], f[\varphi]) := \bar{\sigma}(h_1(u,v,\varphi))$

3.17 Satz: $\forall (u,v,\hat{f}), (u,v',f') \varepsilon K(\alpha, \lambda, \rho, \beta, \sigma, \xi), v \neq v', u,v,v' \varepsilon W_3$:

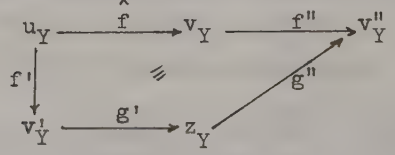
a) $\exists\ (v,z,g), (v',z,g') \varepsilon K(\alpha, \lambda, \rho, \beta, \sigma, \xi)$, mit: $(z \varepsilon W_3)$



oder b) $\exists\ (v,v',g) \varepsilon K(\lambda, \rho, \sigma)$, mit:



oder c) $\exists\ (v',z,g'), (v,v'',f''), (z,v'',g'') \varepsilon K(\alpha, \beta, \xi)$, mit: $(z,v'' \varepsilon W_3$



Beweis: durch Induktion nach $\#_o(u)$.

Induktionsanfang: $\#_o(u)=0 \Rightarrow u=\approx \ \vee\ u=f[\sim] \Rightarrow$ Behauptung (trivial)

Induktionsannahme: Behauptung richtig für $\#_o(u) \leq n$.

Induktionsschluss: $\#_o(u)=n+1, n \geq 0$. Wir untersuchen alle Möglichkei

$\hat{f}=\alpha$;

$f'=\alpha$ $Vf'=\lambda$ $Vf'=\rho$ $Vf'=\beta$ $Vf'=\sigma$ $Vf'=y'\square 1$ $Vf'=1\square y'$,

$y'\varepsilon\{\alpha,\lambda,\rho,\beta,\sigma,y''\square 1,1\square y''\}$: schon in §1 diskutiert.Jetzt be -

trachten wir :

$\hat{f}=\alpha, f'=\xi$: Es kann nicht auftreten,da: $\alpha \Rightarrow u=[p\square[q\square w]]$,d.h. mit

"[" anfangen, $\xi \Rightarrow u=f[r]$,d.h.mit "f" anfangen.

$\hat{f}=\alpha, f'=1\square y'$, $y'=\xi$:Es kann nicht auftreten,da:

$1\square\xi$ ist nicht definiert.

$\hat{f}=\alpha, f'=1\square y', y'=f[y'']$:schon in §2 diskutiert.

$\hat{f}=\alpha, f'=f[y], y\varepsilon\{\alpha,\lambda,\rho,\beta,\sigma,\xi,1\square y', y'\square 1\}$: Es tritt nicht auf.

$\hat{f}=\lambda,$

$f'=\lambda$ $Vf'=\rho$ $Vf'=\beta$ $Vf'=\sigma$ $Vf'=1\square y$ $Vf'=y\square 1$:sind in §1 untersucht.

$\hat{f}=\lambda, f'=\xi$: Es kann nicht auftreten.

$\hat{f}=\lambda, f'=f[y], y\varepsilon\{\alpha,\lambda,\rho,\beta,\sigma,\xi,1\square y', y'\square 1\}$: Es tritt nicht auf.

$\hat{f}=\rho,$

$f'=\rho$ $Vf'=\beta$ $Vf'=\sigma$ $Vf'=1\square y$ $Vf'=y\square 1$:man siehe §1.

$\hat{f}=\rho, f'=\xi$: Es kann nicht auftreten.

$\hat{f}=\rho, f'=f[y], y\varepsilon\{\alpha,\lambda,\rho,\beta,\sigma,1\square y', y'\square 1,\xi\}$: Es tritt nicht auf.

$\hat{f}=\beta,$

$f'=\beta$ $Vf'=\sigma$ $Vf'=y\square 1$ $Vf'=1\square y, y\varepsilon\{\alpha,\lambda,\rho,\beta,\sigma,1\square y', y'\square 1\}$: man siehe §1

$\hat{f}=\beta, f'=\xi$: Es kann nicht auftreten.

$\hat{f}=\beta, f'=1\square y, y=\xi$: Es kann nicht auftreten.

$\hat{f}=\beta, f'=1\square y, y=f[y']$: Es kann nicht auftreten.

$\hat{f}=\beta, f'=f[y], y\varepsilon\{\alpha,\lambda,\rho,\beta,\sigma,\xi,y'\square 1,1\square y'\}$:Es kann nicht auftreten.

$\hat{f}=\sigma,$

$f'=\sigma$ $Vf'=1\square y$ $Vf'=y\square 1$: man siehe §1

$\hat{f}=\sigma, f'=\xi$: Es kann nicht auftreten.

$\hat{f}=\sigma, f'=f[y], y\varepsilon\{\alpha,\lambda,\rho,\beta,\sigma,\xi,1\square y', y'\square 1\}$:Es kann nicht auftreten.

$\hat{f}=\xi, f'=\xi$: trivial,da $v=v'$

$\hat{f}=\xi, f'=1\square y$: Es kann nicht auftreten.

$\hat{f}=\xi, f'=y\square 1$: Es kann nicht auftreten.

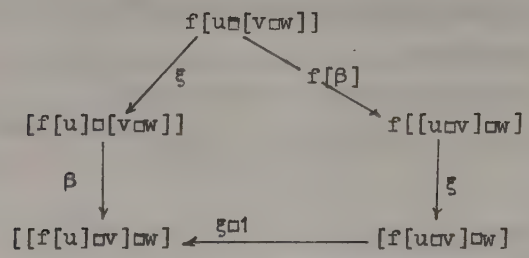
$\hat{f}=\xi, f'=f[y], y=\alpha$: Es tritt nicht auf, sonst: $u \varepsilon W_1 \cap W_2$, also $W_1 \cap W_2 \neq \phi$

(Es ist klar, dass $W_1 \cap W_2 = \phi$)

$\hat{f}=\xi, f'=f[y], y=\lambda$: Unmöglich , sonst $W_1 \cap W_2 \neq \phi$

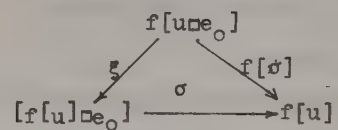
$\hat{f}=\xi, f'=f[y], y=\rho$: Unmöglich , sonst $W_1 \cap W_2 \neq \phi$

$\hat{f}=\xi, f'=f[y], y=\beta$:



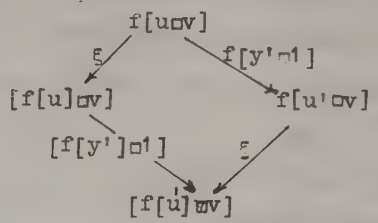
Das Diagramm des Bildes kommutiert nach Voraussetzung, da $\mathfrak{F}$ ein $\mathfrak{C}$-Funktor ist.

$\hat{f}=\xi, f'=f[y], y=\sigma$:



Das Diagramm des Bildes kommutiert nach Voraussetzung, da $\mathfrak{F}$ ein $\mathfrak{C}$-Funktor ist.

$\hat{f}=\xi,, f'=f[y], y=y'\square 1, y'\varepsilon K(\alpha,\lambda,\rho,\beta,\sigma)$



Das Diagramm des Bildes kommutiert, da ξ natürliche Transformation ist

$\hat{f}=\xi, f'=f[y], y=1\square y', y'\varepsilon K(\alpha,\lambda,\rho,\beta,\sigma)$: ganz analog zum letzten Fall

($f[y], y\varepsilon K(\xi)$ ist nicht definiert)

Es ist zu bemerken, dass f[f[y]] nicht definiert ist, deswegen haben wir es bei Diskussion übergangen..

$\hat{f}=y\square 1$,

$f'=y'\square 1$ $Vf'=1\square y'$: schon in §1 betrachtet.

$\hat{f}=1\square y, f'=1\square y'$: auch in §1 betrachtet.

Also folgt die Behauptung.

3.18 Lemma: Sei $w\varepsilon W_3$, $\#_{\xi_0}(w) \geq 1$, dann existieren $w'\varepsilon W_3$, $\#_{\xi_0}(w') = 0$, und ein Weg von w nach w', mit Kanten aus $K(\lambda, \rho, \sigma, \xi)$

Beweis: analog zu Lemma 1.18. Beim Schluss der Induktion, falls $w=f[u\square v], u\varepsilon W_2, v\varepsilon W_1, \#_{\rho_0}(u) \leq n \geq \#_{\rho_0}(v)$ ist, wende man ξ an und erhält $[f[u]\square v]$. Jetzt geht das Verfahren wie beim Fall $w=[u\square v], u\varepsilon W_2$, $v\varepsilon W_1, \#_{\rho_0}(u) \leq n \geq \#_{\rho_0}(v)$. Tatsächlich ist ξ nicht notwendig, aber es ist leichter es auszunutzen.

3.19 Definition: Wir definieren das Wort $w^{(n)}$ rekursiv:

$w^{(1)}=\approx$ V $w^{(1)}= f[\sim]$

$w^{(2)}=[w^{(1)}\square -], \ldots,$

$w^{(n)}=[w^{(n-1)}\square -]$

Jedem Wort $w\varepsilon W_3$ ordenen wir $w^{(\#(w)+1)}$, wobei $w^{(1)}=\approx$ falls $\#_{\xi}(w)=0$, $w^{(1)}=f[\sim]$ falls $\#_{\xi}(w)=1$. Das ist eine wohldefinierte Abbildung. $w^{(n)}$ heisst Standardwort.

Bemerkung: Falls ein Weg von einem Wort zu anderem Wort existiert, dann haben die beiden Worte dasselbe Standardwort.

Beweis: durch Induktion nach Anzahl der "-" im Wort, genauer:

$\forall (u,v,\varphi)\varepsilon K(\alpha,\lambda,\rho,\beta,\sigma,\xi): \#_{-}(u) = \#_{-}(v)$, also:

Induktionsanfang: $\#_{-}(u)=0$: da $\forall(u,v,\varphi)\varepsilon K(\alpha,\lambda,\rho,\beta,\sigma,\xi): \#_{-}(u)=\#_{-}(v)$ $\Rightarrow$ u und v haben dasselbe Standardwort $w^{(1)}$.

Induktionsannahme: Behauptung richtig für alle u,v, mit $\#_{-}(u)=\#_{-}(v)$ $=n-1$, d.h. sie haben das selbe $w^{(n)}$

Induktionsschluss: Behauptung folgt trivial für $\#_{-}(u)=\#_{-}(v)=n$ (nach Definition von $w^{(n+1)}$)

3.20 Lemma :Von $w \varepsilon W_3$ nach $w^{(\#_{\xi}(w)+1)}$ existiert mindestens ein Weg mit Kanten aus $K(\alpha,\beta,\xi)$, wobei $\#_{\xi}(w) = 0, w \neq w^{(\#_{\xi}(w)+1)}$.

Beweis:ganz analog zu 1.20.Im Schluss der Induktion falls $w=f[u \square v], u \varepsilon W_2, v \varepsilon W_1$ ist,wende man zunächst ξ,erhält $[f[u]\square v]$, dann geht das Verfahren wie beim Fall $w=[u \square v], u \varepsilon W_2, v \varepsilon W_1$.

Man fasst die Lemmas 3.18 und 3.20 zusammen,bekommt:

3.21 Satz: Es gibt einen Weg mit Kanten aus $K(\alpha,\lambda,\rho,\beta,\sigma,\xi)$ von w nach $w^{(\#_{\xi}(w)+1)}$, wobei $w \varepsilon W_3, w \neq w^{(\#_{\xi}(w)+1)}$

3.22 Bemerkung: $w \varepsilon W_3 \Rightarrow Rg(w) \geqslant 0$, mit $Rg(w) = 0 \Leftrightarrow w \varepsilon \{w \mid w = w_{st}\}$

Wir beweisen zunächst,dass: $w \varepsilon W_3 \Rightarrow Rg(w) \geqslant 0$ durch Induktion nach $\#_{\square}(w)$:

Induktionsanfang: $\#_{\square}(w)=0 \Rightarrow w=\sim$ V $w=f[\sim]$

Induktionsannahme: Behauptung richtig für $\#_{\square}(w) \leqslant n$.

Induktionsschluss: $\#_{\square}(w)=n+1 \Rightarrow$ i) $w=[u \square v]$ V ii) $w=f[u \square v]$

Für i):$Rg(w)=Rg(u)+Rg(v)+\#_{\square}(v)(\#_{\xi}([u \square v])+1)+\#_{\xi}([u \square v]) \geqslant 0$.

Für ii):$Rg(w)=Rg([u \square v])+\#_{\xi}([u \square v])+\#_{\square}([u \square v]) \geqslant 1$

Wir zeigen jetzt,dass: $Rg(w) = 0 \Leftrightarrow w$ Standardwort ist.

"$\Leftarrow$" durch Induktion nach (w):

Induktionsanfang: $\#_{-}(w)=0 \Rightarrow w=\sim$ V $w=f[\sim] \Rightarrow$Behauptung.

Induktionsannahme: Behauptung richtig für $\#_{-}(w) \leqslant n$.

Induktionsschluss: $\#_{-}(w)=n+1 \quad : w=w^{(n+2)}=[w^{(n+1)}\square -]$

$Rg(w)=Rg(w^{(n+1)})+Rg(-)+(\#_{\square}(-)+1)(\#_{\xi}(w^{(n+1)}+1)-1$

$=0+0+(1)(1)-1=0 \Rightarrow$ Behauptung.

"$\Rightarrow$":Sei $w \varepsilon W_3$, w kein Standardwort, $Rg(w)=0$.

$\Rightarrow$(nach 3.21) $\exists$ ein Weg mit Kanten aus $K(\alpha,\lambda,\rho,\beta,\sigma,\xi)$von w nach $w^{(\#_{-}(w)+1)}$.Aber alle solche Kanten reduzieren den Rang zu $Rg(w_{st}$ $= 0$: widerspruch zu $Rg(w) = 0$. Also,die Behauptung.

Jetzt kommen wir zu unserem wesentlichen Satz:

3.23 Satz: Je zwei Wege von $w \varepsilon W_{\Sigma}$ nach $w^{(\#(w)+1)}$, mit Kanten aus $K(\alpha,\lambda,\rho,\beta,\sigma,\xi)$ haben gleiche Bilder.

Beweis: analog zu 1.23 ,mit 3.17 statt 1.17 dort.

3.24 Hauptsatz: Seien P und Q Objekte aus $\mathfrak{C}$-Kategorie $\mathfrak{N}$, die auf folgende Weise konstruiert sind:

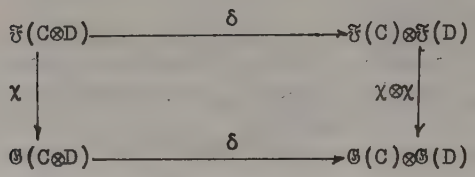
Zur Konstruktion beider Objekte wähle man n Kopien von $B \varepsilon Ob(\mathfrak{C})$, tensoriere $X \varepsilon Ob(\mathfrak{M})$ mit einem Teil der Kopien von B und eventuell weiteren Kopien $I \varepsilon Ob(\mathfrak{C})$, wende darauf den Funktor $\mathfrak{F}$ an und tensoriere das Ergebnis mit den restlichen Kopien von B und eventuell weiteren Objekten $I \varepsilon Ob(\mathfrak{C})$. Alternativ : Man tensoriere $Y \varepsilon Ob(\mathfrak{N})$ mit den n Kopien von B und eventuell weiteren Objekten $I \varepsilon Ob(\mathfrak{C})$, d.h. genauer: Seien $P = u_X$ (bzw. u_Y) und $Q = v_X$ (bzw. v_Y) Bilder von zwei Worten $u,v \varepsilon W_{\Sigma}$, beim Einsetzen von X (bzw. Y), und B, mit $\#(u)=\#(v)=n$. Dann gibt es genau einen Morphismus $\varphi: P \longrightarrow Q$ der sich aus Morphismen zusammensetzt, die sich als Tensorprodukte von $\alpha,\lambda,\rho,\beta,\sigma,\bar{\alpha}^1,\bar{\lambda}^1,\bar{\rho}^1,\bar{\beta}^1,\bar{\sigma}^1,\xi,\bar{\xi}^1$ und Identitäten darstellen lassen, genauer :so dass $\varphi: P \longrightarrow Q$ Bild eines Weges von u nach v, beim Einsetzen von X (bzw. Y) und B ist.

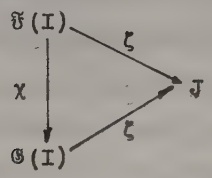
(Angabe wie früher: $\mathfrak{C}$ eine monoidale Kategorie, $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ zwei $\mathfrak{C}$-Kategorien, $\mathfrak{F}: \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{N}$ ein $\mathfrak{C}$-Funktor, $B \varepsilon Ob(\mathfrak{C})$, $X \varepsilon Ob(\mathfrak{M})$ und $Y \varepsilon Ob(\mathfrak{N})$.)

Beweis: analog zu 1.24.

§4 Kohärenz der monoidalen Transformationen

Seien $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ monoidale Kategorien. Seien $\mathfrak{F}:\mathfrak{C}\longrightarrow\mathfrak{D}$, $\mathfrak{G}:\mathfrak{C}\longrightarrow\mathfrak{D}$ monoidale Funktoren. Eine natürliche Transformation $\chi:\mathfrak{F}\longrightarrow\mathfrak{G}$ heisst "monoidale Transformation" (nach[12]) genau dann wenn die folgenden Diagramme:





kommutieren. Die Situation hier ist zum grossen Teil ähnlich zur Situation im zweiten Kapitel: "Kohärenz der monoidalen Funktoren". Wie immer, zeigen wir, dass die obigen Voraussetzungen "Kohärenzbedingungen" sind. Wir wollen besser, Hinweise auf analoge Beweise in §1-3 verweisen.

4.1 Definition: Seien $M:=\{[,],\sqcap,e_o,-,e_1,\sim,f,g\}$

$Z:=\{\phi\}\cup M\cup M^2\cup\ldots$

W_1 sei (wie bei §1-3) die kleinste Teilmenge von Z, so dass:

1) $e_o\varepsilon W_1 \wedge -\varepsilon W_1$

2) $u\varepsilon W_1 \wedge v\varepsilon W_1 \Rightarrow [u\sqcap v]\varepsilon W_1$ (W_1 heisst, wie früher, die Menge aller Worte bzgl. $\mathfrak{C}$)

W_2 sei die kleinste Teilmenge von Z, so dass:

1) $e_1\varepsilon W_1 \wedge \sim\varepsilon W_2$

2) $w\varepsilon W_1 \Rightarrow f[w]\varepsilon W_2 \wedge g[w]\varepsilon W_2$

3) $u\varepsilon W_2 \wedge v\varepsilon W_2 \Rightarrow [u\sqcap v]\varepsilon W_2$

W_2 heisst die Menge aller Worte bzgl.

4.2 Definition: Seien:

$T := \{[,], \square, 1, \alpha, \lambda, \rho, \delta, \zeta, \chi, \bar{\alpha}^1, \bar{\lambda}^1, \bar{\rho}^1, \bar{\delta}^1, \bar{\zeta}^1\}$

$Y := \{\phi\} \cup T \cup T^2 \cup \ldots$

$k_\alpha := \{([u\square[v\square w]], [[u\square v]\square w], \alpha) \mid u,v,w \in W_1\}$

$l_\alpha := \{([u\square[v\square w]], [[u\square v]\square w], \alpha) \mid u,v,w \in W_2\}$

$k_\lambda := \{([e_o\square u], u, \lambda) \mid u \in W_1\}$

$l_\lambda := \{([e_1\square u], u, \lambda) \mid u \in W_2\}$

$k_\rho := \{([u\square e_o], u, \rho) \mid u \in W_1\}$

$l_\rho := \{([u\square e_1], u, \rho) \mid u \in W_2\}$

$l_\delta := \{(f[u\square v], [f[u]\square f[v]], \delta) \mid u,v \in W_1\} \cup \{(g[u\square v], [g[u]\square g[v]], \delta) \mid u,v \in W_1\}$

$l_\zeta := \{(f[e_o], e_1, \zeta)\} \cup \{(g[e_o], e_1, \zeta)\}$

$l_\chi := \{(r[u], g[u], \chi) \mid u \in W_1\}$

$k_{\bar{\alpha}^1} := \{([[u\square v]\square w], [u\square[v\square w]], \bar{\alpha}^1) \mid u,v,w \in W_1\}$

$k_{\bar{\lambda}^1} := \{(u, [e_o\square u], \bar{\lambda}^1) \mid u \in W_1\}$

$k_{\bar{\rho}^1} := \{(u, [u\square e_o], \bar{\rho}^1) \mid u \in W_1\}$

$l_{\bar{\alpha}^1} := \{([[u\square v]\square w], [u\square[v\square w]], \bar{\alpha}^1) \mid u,v,w \in W_2\}$

$l_{\bar{\lambda}^1} := \{(u, [e_1\square u], \bar{\lambda}^1) \mid u \in W_2\}$

$l_{\bar{\rho}^1} := \{(u, [u\square e_1], \bar{\rho}^1) \mid u \in W_2\}$

$l_{\bar{\delta}^1} := \{([f[u]\square f[v]], f[u\square v], \bar{\delta}^1) \mid u,v \in W_1\} \cup$
$\{([g[u]\square g[v]], g[u\square v], \bar{\delta}^1) \mid u,v \in W_1\}$

$l_{\bar{\zeta}^1} := \{(e_1, f[e_o], \bar{\zeta}^1)\} \cup \{(e_1, g[e_o], \bar{\zeta}^1)\}$

Seien $\psi_i \in \{\alpha, \lambda, \rho, \bar{\alpha}^1, \bar{\lambda}^1, \bar{\rho}^1\}$, $i \in N$,

$\varphi_j \in \{\delta, \zeta, \bar{\delta}^1, \bar{\zeta}^1, \chi\}$, $\in N$

$K(k_{\psi_i})$ sei die kleinste Teilmenge von $W_1 \times W_1 \times Y$, die k_{ψ_i} enthält mit:

$(u,v,\varphi) \in K(k_{\psi_i}) \Rightarrow \forall w \in W_1 : ([u\square w], [v\square w], [\varphi\square 1]) \in K(k_{\psi_i}) \wedge$

$([w\square u], [w\square v], [1\square\varphi]) \in K(k_{\psi_i})$

$K(l_{\psi_i})$ sei die kleinste Teilmenge von $W_2 \times W_2 \times Y$, die l_{ψ_i} enthält, mit:

$(u,v,\varphi)\varepsilon K(1_{\psi_i}) \Rightarrow \forall\ w\varepsilon W_2 : ([u\square w],[v\square w],[\varphi\square 1])\varepsilon K(1_{\psi_i}) \wedge$

$([w\square u],[w\square v],[1\square\varphi])\varepsilon K(1_{\psi_i})$,

$(u,v,\varphi)\varepsilon K(k_{\psi_i}) \Rightarrow (f[u],f[v],f[\varphi])\varepsilon K(1_{\psi_i}) \wedge$

$(g[u],g[v],g[\varphi])\varepsilon K(1_{\psi_i})$

$K(1_{\psi_i})$ sei die kleinste Teilmenge von $W_2 \times W_2 \times Y$, die 1_{ψ_i} enthält, mit:

$(u,v,\varphi)\varepsilon K(1_{\psi_i}) \Rightarrow \forall\ w\varepsilon W_2 : ([u\square w],[v\square w],[\varphi\square 1])\varepsilon K(1_{\psi_i}) \wedge$

$([w\square u],[w\square v],[1\square\varphi])\varepsilon K(1_{\psi_i})$

Die Definitionen der Kanten, Pfeilkanten, und $K(\psi_1,\ldots,\psi_m,\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$, und die Bezeichnungen der Pfeilkanten sind genau wie beim Kapitel der monoidalen Funktoren.

Die Definitionen 1.3,1,4, und die Lemmas 1.5,1.7 werden hier wieder mit den Nummern 4.3,4.4,4.5 und 4.7 stehen. Der Hilfs-Satz 2.6 ist hier auch gültig. Der Beweis geht genau so wie bei monoidalen Funktoren. Man bemerkt, dass nur der "Buchstabe" g statt der "Buchstabe"f auftreten kann.

4.8 Lemma: i) $w=[u\square v] \Rightarrow l(w)=l(u)+l(v)+3 \quad (u,v,w\varepsilon W_2)$

ii) $w=f[u] \vee w=g[u] \Rightarrow l(w)=l(u)+3 \quad (u\varepsilon W_1, w\varepsilon W_2)$

Beweis: genau wie bei 2.8

Lemma 1.9 wird hier mit der Nummer 4.9 stehen. Man formuliert den Hilfssatz 4.10, der dem Hilfssatz 1.10 folgendermassen:

4.10 Hilfssatz: $w\varepsilon W_2 \Rightarrow \#_l(s_n(w)) - \#_J(s_n(w)) > 0$, falls $\phi \neq s_n(w) \not\subseteq \{f,g\}, n >$

Jetzt ist der Satz 2.11 hier auch gültig, der die Nummer 4.11 bekommt, mit:

iv) $g[w]=g[w'], w,w'\varepsilon W_1 \Rightarrow w=w'$

Die Beweise für 4.10 und 4.11 sind ganz analog zur Beweise von 2.10 und 2.11, bis auf, wie beim Hilfssatz 4.6, die Betrachtung, dass der "Buchstabe g" statt der"Buchstabe f" auftreten kann.

Jetzt kommen wir zur Definition des Ranges:

4.12 Lemma und Definition: $(W,S,\hat{X})$, wobei $W=(W_1,W_2)$, $S=(s_1,s_2,s_3,s_4)$,

$X=(e_o,-,e_1,\sim)$,

$s_1: W_1 \times W_1 \longrightarrow W_1$, $s_2: W_2 \times W_2 \longrightarrow W_2$

$(u,v) \longmapsto [u \sqcup v]$ $(u,v) \longmapsto [u \sqcup v]$

$s_3: W_1 \longrightarrow W_2$ $s_4: W_1 \longrightarrow W_2$

$u \longmapsto f[u]$ $u \longmapsto g[u]$

ist eine Peano-Algebra vom Typ $(2,4,4,\alpha,\beta)$, wobei:

$\alpha(1)=(1,1,1)$, $\alpha(2)=(2,2,2)$, $\alpha(3)=(1,2)$, $\alpha(4)=(1,2)$, $\beta(1)=\beta(2)=1$,

$\beta(3)=\beta(4)=2$.

Beweis: $Bi(s_1) \cap Bi(s_2) = \phi$, $Bi(s_1) \cap Bi(s_3) = \phi$, $Bi(s_1) \cap B(s_4) = \phi$:

klar. $Bi(s_2) \cap Bi(s_3) = \phi$: schon in §2 bewiesen. $Bi(s_2) \cap Bi(s_4) = \phi$:

analog. $Bi(s_3) \cap Bi(s_4) = \phi$: klar, sonst f=g.

Es ist klar, dass: $\forall\, u,v \in W_1$: $-\neq [u \sqcup v] \wedge -\neq f[u] \wedge -\neq g[u]$

$\forall\, u,v \in W_2$: $-\neq [u \sqcup v]$

Analog für e_o, e_1, und $\sim$

Sei $A(u)$ eine Aussage über $u \in W_1 \cup W_2$, mit:

(1) $A(e_o)$, $A(-)$, $A(e_1)$, $A(\sim)$.

(2) Gelten $A(u_1), A(u_1'), A(u_2)$, und $A(u_2')$, wobei $u_1, u_1' \in W_1, u_2, u_2' \in W_2$, so gelten auch:

$A([u_1 \sqcup u_1'])$, $A([u_2 \sqcup u_2'])$, $A(f[u_1])$, $A(f[u_1'])$, $A(g[u_1])$, $A(g[u_1'])$

Zu zeigen : $\forall u \in W_1 \cup W_2$: $A(u)$

Wir betrachten $\{u \in W_1 \cup W_2 \mid A(u)\} = \{u \in W_1 \mid A(u)\} \cup \{u \in W_2 \mid A(u)\} \subset W_1 \cup W_2$

Man zeigt analog wie bei §1-2 die Behauptung.

Jetzt definieren wir:

$g_1: W_1 \times N \times W_1 \times N \longrightarrow N$

$(u,r,v,s) \longmapsto r+s+(\#_{e_o}(v)+1)(\#_{e_o}([u \sqcup v])+\#_{e_1}([u \sqcup v])+1)-1$

$g_2: W_2 \times N \times W_2 \times N \longrightarrow N$

$(u,r,v,s) \longmapsto r+s+(\#_{e_o}(v)+1)(\#_{e_2}([u \sqcup v])+\#_{e_1}([u \sqcup v])+1)-1$

$g_3: W_1 \times N \longrightarrow N$

$(u,r) \longmapsto r+\#_{e_o}(u)+\#_{e_o}(u)+1$

$g_4 : W_1 \times N \longrightarrow N$

$(u,r) \longrightarrow r + \#_{\varepsilon_1}(u) + \#_{\alpha}(u)$

Dann folgt nach 0.14, dass es genau eine Abbildung "Rg" (Rang) gibt, $Rg: W_1 \cup W_2 \longrightarrow N$, so dass:

$Rg(e_0) = Rg(-) = Rg(e_1) = Rg(\sim) = 0$,

$\forall\, u,v \in W_1$: $Rg([u \square v]) = Rg(s_1(u,v)) = g_1(u, Rg(u), v, Rg(v))$

$= Rg(u) + Rg(v) + (\#_{\alpha}(v)+1)(\#_{\varepsilon_3}([u \square v]) + \#_{\varepsilon_4}([u \square v])+1) - 1$

$\forall\, u,v \in W_2$: $Rg([u \square v]) = Rg(s_2(u,v)) = g_2(u, Rg(u), v, Rg(v))$

$= Rg(u) + Rg(v) + (\#_{\alpha}(v)+1)(\#_{\varepsilon_3}([u \square v]) + \#_{\varepsilon_4}([u \square v])+1) - 1$

$\forall\, u \in W_1$: $Rg(f[u]) = Rg(s_3(u)) = g_3(u, Rg(u)) = Rg(u) + \#_{\alpha}(u) + \#_{\varepsilon_3}(u) + 1$

$\forall\, u \in W_1$: $Rg(g[u]) = Rg(s_4(u)) = g_4(u, Rg(u)) = Rg(u) + \#_{\alpha}(u) + \#_{\varepsilon_3}(u)$

4.13 Lemma: i) $(u,v,\varphi) \in K(\alpha,\delta,\zeta,\chi) \Rightarrow$ a) $\#_{\alpha}(u) = \#_{\alpha}(v)$

b) $\#_{\varepsilon_1}(u) + \#_{\varepsilon_4}(u) = \#_{\varepsilon_3}(v) + \#_{\varepsilon_4}(v)$

ii) $(u,v,\varphi) \in K(\lambda,\rho) \Rightarrow$ a) $\#_{\alpha}(u) = \#_{\alpha}(v) + 1$

b) $\#_{\varepsilon_3}(u) + \#_{\varepsilon_4}(u) = \#_{\varepsilon_3}(v) + \#_{\varepsilon_4}(v) + 1$

Beweis: durch Induktion nach $\#_{\alpha}(\varphi)$

4.14 Satz: $(u,v,\varphi) \in K(\alpha,\lambda,\rho,\delta,\zeta,\chi) \Rightarrow Rg(v) < Rg(u)$

Beweis: nach Satz 2.14 nur zu zeigen: $(u,v,\varphi) \in K(\chi) \Rightarrow Rg(v) < Rg(u)$

Beweis durch Induktion nach $\#_{\alpha}(\varphi)$.

Induktionsanfang: $\#_{\alpha}(\varphi) = 0 \Rightarrow \varphi = \chi \Rightarrow Rg(u) = Rg(v) + 1 \Rightarrow$ Behauptung.

Induktionsannahme: Sei Behauptung richtig falls $\#(\varphi) \leq n$.

Induktionsschluss: $\#_{\alpha}(\varphi) = n+1 \Rightarrow$ i) $\varphi = 1 \square \psi$ V $\varphi = \psi \square 1$. Wir betrachten:

$\varphi = 1 \square \psi$. Der Fall $\varphi = \psi \square 1$ ist ganz analog. Also sei :

$(u,v,\varphi) = ([w \square p], [w \square q], [1 \square \psi])$

$Rg([w \square p]) = Rg(w) + Rg(p) + (\#_{\alpha}(p)+1)(\#_{\varepsilon_3}([w \square p]) + \#_{\varepsilon_4}([w \square p])+1) - 1$

$Rg([w \square q]) = Rg(w) + Rg(q) + (\#_{\alpha}(q)+1)(\#_{\varepsilon_3}([w \square q]) + \#_{\varepsilon_4}([w \square q])+1) - 1$

$\Rightarrow$ (nach Induktionsannahme und 4.13) Behauptung.

Die Definition 2.15 wird hier kopiert, dazu die Nummer 4.15.

4.16 Die Bilder: Gegeben $(\mathfrak{C},\otimes,I),(\mathfrak{D},\odot,J)$ monoidale Kategorien, $\mathfrak{F}:\mathfrak{C}\longrightarrow\mathfrak{D}$, $\mathfrak{G}:\mathfrak{C}\longrightarrow\mathfrak{D}$ monoidale Funktoren, $\chi:\mathfrak{F}\longrightarrow\mathfrak{G}$ monoidale Transformation, $A\varepsilon Ob(\mathfrak{C})$, und $B\varepsilon Ob(\mathfrak{D})$.

Die Situation ist ganz analog zu 2.16: Die Worte bilden eine Peano-Algebra. Wir definieren die $g_1,\ldots,g_4$ die mit den möglichen $s_1,\ldots,s_4$ korrespondieren, also existiert genau eine Abbildung $h:W_1\cup W_2\longrightarrow Ob(\mathfrak{C})\cup Ob(\mathfrak{D})$, so dass:

i) $h(e_o)=I$, $h(-)=A$, $h(e_1)=J$, $h(\sim)=B$

ii) $\forall u,v\varepsilon W_1$: $h([u\square v])=h(u)\otimes h(v):=u_A\otimes v_A$

$\forall u\varepsilon W_1$: $h(f[u])=\mathfrak{F}(h(u)):=\mathfrak{F}(u_A)$

$\forall u\varepsilon W_1$: $h(g[u])=\mathfrak{G}(h(u)):=\mathfrak{G}(u_A)$

$\forall u,v\varepsilon W_2$: $h([u\square v])=h(u)\otimes h(v):=u_B\otimes v_B$

Die Kanten bilden eine Peano-Algebra, so definiert man die g's, die mit den s's bzgl. der Kanten korrespondieren, also existiert genau eine Abbildung $h_1:K(k_{\psi_i})\cup K(1_{\psi_i})\cup K(1_{\varphi_j})\longrightarrow\mathfrak{C}\cup\mathfrak{D}$ so dass:

$\forall\varphi\varepsilon\{\alpha,\lambda,\rho,\bar{\alpha}^1,\bar{\lambda}^1,\bar{\rho}^1,\delta,\zeta,\delta^1,\zeta^1,\chi\}$: $h_1(u,v,\varphi):=(h(u),h(v),\varphi)$,

$\forall\,(u,v,\varphi)\varepsilon K(k_{\psi_i})\cup K(1_{\psi_i})\cup K(1_{\varphi_j})$, $\forall\, w\varepsilon W_1\cup W_2$:

$h_1([w\square u],[w\square v],[1\square\varphi]):=(h([w\square u]),h([w\square v]),1\otimes\varphi)$, (so lange die Kante $([w\square u],[w\square v],[1\square\varphi])$ definiert ist),

$h_1([u\square w],[v\square w],[\varphi\square 1]):=(h([u\square w]),h([v\square w]),\varphi\otimes 1)$, (so lange die Kante $([u\square w],[v\square w],[\varphi\square 1])$ definiert ist),

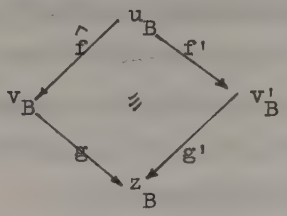
$\forall\,(u,v,\varphi)\varepsilon K(k_{\psi_i})$:

$h_1(f[u],f[v],f[\varphi]):=\mathfrak{F}(h_1(u,v,\varphi))$

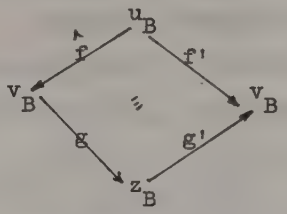
$h_1(g[u],g[v],g[\varphi]):=(\mathfrak{G}(h_1(u,v,\varphi))$

4.17 Satz: $\forall\ (u,v,\hat{f}),(u,v',f')\varepsilon K(\alpha,\lambda,\rho,\delta,\zeta,\chi)\ ,v\neq v',\ u,v,v'\varepsilon W_2$

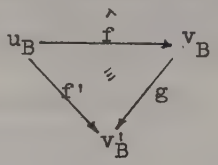
a) $\exists(v,z,g),(v',z,g')\varepsilon K(\alpha,\lambda,\rho,\delta,\zeta,\chi)$, mit:



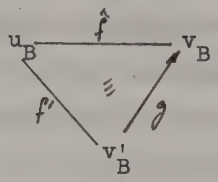
oder $\exists\ (v,z,g),(z,v',g')\varepsilon K(\lambda,\rho,\zeta)$ mit:



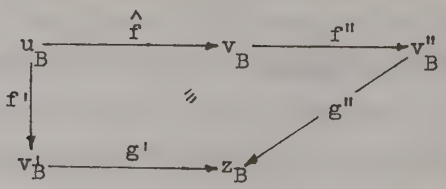
oder b) $\exists\ (v,v',g)\varepsilon K(\lambda,\rho)$, mit:



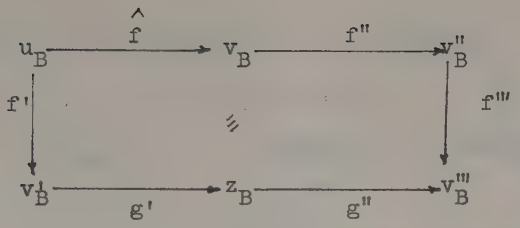
oder $\exists\ (v',v,g)\varepsilon K(\zeta)$, mit:



oder c) $\exists\ (v',z,g'),(v,v'',f''),(v'',z,g'')\varepsilon K(\alpha,\delta,\chi)$, mit:



oder d) $\exists\ (v',z,g'),(v,v'',f''),(v'',v''',f'''),(z,v''',g'')\varepsilon K(\alpha,\delta)$, mit:



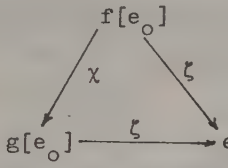
Beweis: durch Induktion nach $\#_a(u)$:

Induktionsanfang: $\#_a(u) = 0 \Rightarrow u \varepsilon \{e_1, \sim, f[e_o], g[e_o], f[-], g[-]\}$

Falls $u=e_1$ V $u=\sim$ v $u=g[-]$ gibt es kein f.

Falls $u=f[-] \Rightarrow f=f'=\chi$ (falls f,f' existieren) $\Rightarrow v=v'$

Falls $u=f[e_o] \Rightarrow f,f' \varepsilon \{\zeta,\chi\}$. $f=f' \Rightarrow v=v'$. $f \neq f' \Rightarrow$



Das Bild ist ein kommutatives Diagramm nach Voraussetzungen(χ ist eine monoidale Transformation). $u=g[e_o] \Rightarrow f=f'=\zeta \Rightarrow v=v'=e_1$.

Induktionsannahme : Behauptung richtig für $\#_a(u) \leqslant n$.

Induktionsschluss: $\#_a(u)=n+1, n \geqslant 0$.

Wir bemerken zunächst, dass : $\forall\, y \varepsilon \bar{K}(\delta,\zeta,\chi)$: $f[y], g[y]$ nicht definiert sind.

Im Bezug auf §2, und nach der obigen Bemerkung bleiben nur die folgenden Möglichkeiten zu betrachten:

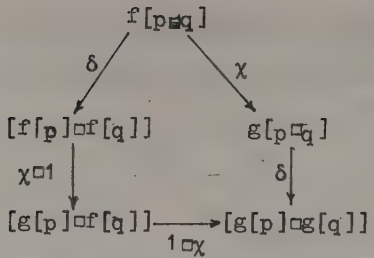
$\hat{f}=\alpha, f'=\chi$: Es tritt nicht auf , da ein Wort nicht mit "[", und in anderer Darstellung mit "f" anfangen kann

$\hat{f}=\alpha, f'=1 \square \chi$: Es tritt nicht auf, da: $\alpha \Rightarrow u=[r \square [s \square t]]$, während $1 \square \chi \Rightarrow u=[p \square f[q]] \Rightarrow [s \square t] = f[q] : \Rightarrow zt = q$, $z \varepsilon Z$: Widerspruch, da zt kein Wort ist.

$\hat{f}=\lambda, f'=\chi$: Es tritt nicht auf wie bei $f=\alpha, f'=\chi$

$\hat{f}=\rho, f'=\chi$: Es tritt nicht auf analoges Argument zum letzten Fall.

$\hat{f}=\delta, f'=\chi$:



Das Bild ist ein kommutatives Diagramm nach Voraussetzung (χ ist eine monoidale Transformation)

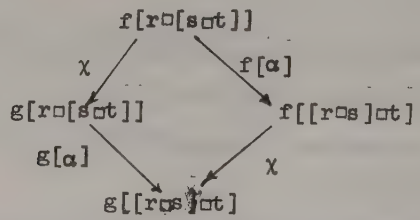
$\hat{f}=\zeta, f'=\chi$:schon beim Anfang der Induktion betrachtet.

$\hat{f}=\chi, f'=\chi$:trivial, da v=v'

$\hat{f}=\chi, f'=1\square y$:Es tritt nicht auf, sonst: $\exists p,q\in W_2$: $f[u] = [p\square q]$

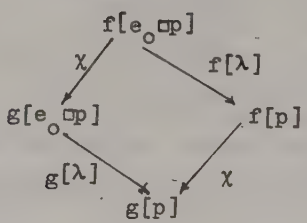
$\hat{f}=\chi, f'=y\square 1$:Es kann nicht auftreten.

$\hat{f}=\chi, f'=f[\alpha]$:



Das Bild ist ein kommutatives Diagramm, da χ natürliche Transformation ist.

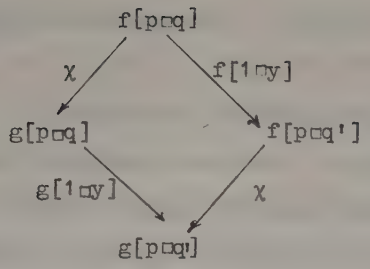
$\hat{f}=\chi, f'=f[\lambda]$:



Das Bild des Diagrammes ist ein kommutatives Diagramm, da χ natürliche Transformation ist.

$\hat{f}=\chi, f'=f[\rho]$: analog zum Fall : $\hat{f}=\chi, f'=f[\lambda]$

$\hat{f}=\chi, f'=f[1\square y], y\in\bar{K}(\alpha,\lambda,\rho)$:



Das Bild ist ein kommutatives Diagramm ist, da χ natürliche Transformation ist.

$\hat{f}=\chi, f'=[y\square 1], y\varepsilon\bar{K}(\alpha,\lambda,\rho)$: analog zum letzten Fall.

$\hat{f}=\chi, f'=g[y], y\varepsilon\bar{K}(\alpha,\lambda,\rho)$: Es tritt nicht auf, sonst existiert ein Wort, das mit "f", und auch mit "g" anfängt.

Also folgt die Behauptung.

Lemma 2.18 ii) würde hier abgeschrieben und die Nummer 4.18 tragen.

4.19 Definition: Standardwort eines Wortes w in W_2 "$w_{st.}$"

~ und g[-] sind Standardworte.

u ist ein Standardwort $\Rightarrow$ [u□~] $\wedge$ [u□g[-]] sind Standardworte.

Ganz analog zu §2 (Kohärenz der monoidalen Funktoren) zeigt man, falls ein Weg von einem Wort zu einem anderen Wort existiert, dann haben beide Worte dasselbe Standardwort.

4.20 Lemma: Für jedes Wort $w\varepsilon W_2$, gibt es genau ein Standardwort "$w_{st.}$" und einen Weg von w nach $w_{st.}$, mit Kanten aus $K(\alpha,\delta,\chi)$, wobei $\#_{\varepsilon_2}(w)=\#_{\varepsilon_1}(w)=0. w\neq w_{st.}$

Beweis: Mittels χ kann man jedes f mit g vertauschen, dann geht der Beweis ganz analog zu 2.20. Genauer, Beweis durch Induktion nach $\#_{\alpha}(w)$:

Induktionsanfang: $\#_{\alpha}(w)=0 \Rightarrow$ w=~ Vw=f[-] Vw=g[-].~ und g[-] sind

Standardworte. f[-]wird mittels χ zum Standardwort g[-] trans. formiert werden.

Induktionsannahme: Behauptung richtig für $\#_o(w) \leq n$

Induktionsschluss: $\#_o(w)=n+1: \Rightarrow w=[u \sqcup v]$ $Vw=f[u \sqcup v]$ $Vw=g[u \sqcup v]$

Falls $w=[u \sqcup v]$ ist, abschreibt man den Beweis von 2.20 ab bis auf die Kanten aus $K(\alpha,\delta,\chi)$ statt $K(\alpha,\delta)$, und am Ende erhält man $[[u_{st.} \sqcup v']\sqcup v"]$, wobei $v"=\sim Vv"=g[-]$, statt $v"=\sim V\ v"=f[-]$

Falls $w=g[u \sqcup v]$, geht der Beweis ganz genau wie bei 2.20 mit $w=f[u \sqcup v]$. Falls $w=f[u \sqcup v]$ ist, wende man χ zunächst an, dann geht der Beweis ganz genau wie bei 2.20 mit $w=f[u \sqcup v]$, Also folgt die Behauptung.

Aus 4.18 und 4.20 bekommt man unmittelbar:

4.21 Satz: Für jedes Wort $w \varepsilon W_2$ gibt es genau ein Standardwort $w_{st.}$ und einen Weg von w nach $w_{st.}$, mit Kanten aus $K(\alpha,\lambda,\rho,\delta,\zeta,\chi)$, wobei $w \neq w_{st.}$, $\#_o(w)+\#_o(w) \geq 1$

4.22 Bemerkung: $w \varepsilon W_2 \Rightarrow Rg(w) \geq 0$, mit $Rg(w)=0 \Leftrightarrow w \varepsilon \{w|w=w_{st.}\} \cup \{e_1\}$

Beweis: zu zeigen $w \varepsilon W_2 \Rightarrow Rg(w) \geq 0$: durch Induktion nach $\#_o(w)$

Induktionsanfang: $\#_o(w) = 0 \Rightarrow w \varepsilon \{e_1, \sim, f[-], g[-], f[e_o], g[e_o]\}$

$Rg(\sim)=Rg(e_1)=Rg(g[-]) = 0$, $Rg(f[-])=1$, $Rg(g[e_o])=1$, $Rg(f[e_o])=2$

Induktionsannahme: Sei Behauptung richtig für w, mit $\#_o(w) < n$.

Induktionsschluss: wie bei Bemerkung 2.22, mit $f \sim g$ statt f.

zu zeigen $Rg(w)=0 \Leftrightarrow w \varepsilon \{w|w=w_{st.}\} \cup \{e_1\}$: Man würde den Rest des Beweises von 2.22 mit g statt f, $\{e_1\}$ statt $\{e_o, e_1\}$, und $K(\alpha,\lambda,\rho,\delta,\zeta,\chi)$ statt $K(\alpha,\lambda,\rho,\delta,\zeta)$ abschreiben.

Jetzt kommen wir zu unserem Hauptsatz des Kapitels:

4.23 Hauptsatz:

Gegeben $(\mathfrak{C}, \otimes, I), (\mathfrak{D}, \otimes, J)$ monoidale Kategorien, $\mathfrak{F}:\mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$ $\mathfrak{G}:\mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$ monoidale Funktoren, $\chi:\mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{G}$ monoidale Transformation $A \varepsilon Ob(\mathfrak{C}), B \varepsilon Ob(\mathfrak{D})$.

Sei P ein Objekt von $\mathfrak{D}$, das sich mit n Kopien von $A \varepsilon Ob(\mathfrak{C})$, m Kopien von $B \varepsilon Ob(\mathfrak{D})$ und weiteren Kopien von I und J durch Anwendung von Tensorprodukten bzgl. $\mathfrak{C}$ oder $\mathfrak{D}$ und durch Anwendungen der Funktoren $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ bilden lässt, sei Q ein Objekt von $\mathfrak{D}$, das sich als Tensorprodukt von n Kopien von $\mathfrak{G}(A)$, m Kopien von B schreiben lässt, wobei die Reihenfolge der Kopien von A und B in der Objekten P und Q dieselbe sei und die Klammen im Objekt Q so weit wie möglich nach links gezogen seien. Genauer: Seien $P = u_B$, und $Q = v_B$ Bilder von zwei Worten $u, v \varepsilon W_2$ beim Einsetzen von A und B, und sei v das Standardwort zu u. Dann gibt es genau einen Morphismus $\varphi : P \longrightarrow Q$, der sich als Tensorprodukte von $\alpha, \lambda, \rho, \delta, \zeta, \bar{\alpha}^1, \bar{\lambda}^1, \bar{\rho}^1, \bar{\delta}^1, \bar{\zeta}^1, \chi$, und Identitäten darstellen lassen, genauer so dass $\varphi: P \longrightarrow Q$ Bild eines Weges von u nach v beim Einsetzen von A und B ist.

Beweis: analog zu 1.24.

4.24 Bemerkung:

Da Ψ kein Isomorphismus ist, sind die Wege nicht beliebig, sondern müssen in Standardworten enden.

4.25 Bemerkung: Für $w \in W_2$ mit $\#_-(w)+\#_\sim(w) = 0$ gilt das Lemma bei Bemerkung 2.25 hier.

Beweis: analog.

§5 Kohärenz der $\mathbb{C}$-Transformationen

Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{N}$ zwei $\mathbb{C}$-Kategorien, $\mathfrak{F}:\mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{N}$ und $\mathfrak{G}:\mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{N}$ zwei $\mathbb{C}$-Funktoren.

Eine natürliche Transformation $\Psi:\mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{G}$ heisst $\mathbb{C}$-Transformation (nach [12]) genau dann wenn das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{F}(M\otimes C) & \xrightarrow{\xi} & \mathfrak{F}(M)\otimes C \\ \downarrow{\scriptstyle \Psi} & & \downarrow{\scriptstyle \Psi\otimes 1} \\ \mathfrak{G}(M\otimes C) & \xrightarrow{\xi} & \mathfrak{G}(M)\otimes C \end{array}$$

Wir zeigen, dass dies Kohärenzbedingung ist. Die Situation hier ist zum Teil ähnlich zur Situation in §3"Kohärenz der $\mathbb{C}$-Funktoren", andererseits ist es nicht sehr verschieden von der Situation in §4"Kohärenz der monoidalen Transformationen". Deswegen geben wir meistens Hinweise und keine ausführlichen Beweise.

5.1 Definition: Seien:

$M:=\{[\,,\,],\square,e_o,-,\sim,\otimes,f,g\}$

$Z:=\{\phi\}\cup M\cup M^2\cup\ldots$

W_1 und W_2 sind definiert wie bei §3"Kohärenz der $\mathbb{C}$-Funktoren"

W_3 sei die kleinste Teilmenge von Z, so dass:

i) $\otimes\in W_3$

ii) $u\in W_2 \Rightarrow f[u]\in W_3 \wedge g[u]\in W_3$

iii) $u\in W_3 \wedge v\in W_1 \Rightarrow [u\square v]\in W_3$

W_3 heisst die Menge aller Worte bzgl. $\mathfrak{N}$

5.2 Definition: Seien:

$T:=\{[\,,\,],\square,1,\alpha,\lambda,\rho,\beta,\sigma,\xi,\Psi,\bar{\alpha}^1,\bar{\lambda}^1,\bar{\rho}^1,\bar{\beta}^1,\bar{\sigma}^1,\bar{\xi}^1\}$

$Y:=\{\phi\}\cup T\cup T^2\cup\ldots$

$k_\alpha,k_\lambda,k_\rho,l_\beta,l_\sigma,k_{\bar{\alpha}^1},k_{\bar{\lambda}^1},k_{\bar{\rho}^1},l_{\bar{\beta}^1},l_{\bar{\sigma}^1},m_\beta,m_\sigma,m_{\bar{\beta}^1},m_{\bar{\sigma}^1}$ sind definiert wie beim §3: Kohärenz der $\mathbb{C}$-Funktoren.

$m_\xi := \{f[u\sqcup v], [f[u]\sqcup v], \xi) \mid u\varepsilon W_2, v\varepsilon W_1\} \cup \{(g[u\sqcup v], [g[u]\sqcup v], \xi) \mid u\varepsilon W_2, v\varepsilon W_1$

$m_{\bar{\xi}^1} := \{([f[u]\sqcup v], f[u\sqcup v], \bar{\xi}^1) \mid u\varepsilon W_2, v\varepsilon W_1\} \cup$

$\{([g[u]\sqcup v], g[u\sqcup v], \bar{\xi}^1) \mid u\varepsilon W_2, v\varepsilon W_1\}.$

$m_\Psi : \{(f[u], g[u], \Psi) \mid u\varepsilon W_2\}$

Seien: $\psi_i \varepsilon \{\alpha, \lambda, \rho, \bar{\alpha}^1, \bar{\lambda}^1, \bar{\rho}^1\}$, $i\varepsilon N$

$\varphi_j \varepsilon \{\beta, \sigma, \bar{\beta}^1, \bar{\sigma}^1\}$, $j\varepsilon N$

$\theta_k \varepsilon \{\xi, \bar{\xi}^1, \Psi\}$, $k\varepsilon N$

$K(k_{\psi_i}), K(l_{\psi_i}), K(l_{\varphi_j}), K(m_{\theta_k})$ sind definiert wie in §3.

$K(m_{\psi_i})$ sei die kleinste Teilmenge von $W_3 \times W_3 \times Y$, mit:

1) $(u,v,\varphi)\varepsilon K(m_{\psi_i}) \Rightarrow \forall w\varepsilon W_1$: $([u\sqcup w], [v\sqcup w], [\varphi\sqcup 1]) \varepsilon K(m_{\psi_i})$,

2) $(u,v,\varphi)\varepsilon K(k_{\psi_i}) \Rightarrow \forall w\varepsilon W_3$: $([w\sqcup u], [w\sqcup v], [1\sqcup \varphi]) \varepsilon K(m_{\psi_i})$,

3) $(u,v,\varphi)\varepsilon K(l_{\psi_i}) \Rightarrow$ $(f[u], f[v], f[\varphi]) \varepsilon K(m_{\psi_i}) \wedge$

$(g[u], g[v], g[\varphi]) \varepsilon K(m_{\psi_i})$.

$K(m_{\varphi_j})$ sei die kleinste Teilmenge von $W_3 \times W_3 \times Y$, die m_{φ_j} enthält, mit

1) $(u,v,\varphi)\varepsilon K(m_{\varphi_j}) \Rightarrow \forall w\varepsilon W_1$: $([u\sqcup w], [v\sqcup w], [\varphi\sqcup 1]) \varepsilon K(m_{\varphi_j})$,

2) $(u,v,\varphi)\varepsilon K(l_{\varphi_j}) \Rightarrow$ $(f[u], f[v], f[\varphi]) \varepsilon K(m_{\varphi_j}) \wedge$

$(g[u], g[v], g[\varphi]) \varepsilon K(m_{\varphi_j})$.

Definitionen und Bezeichnungen von Kanten und Pfeilkanten sind wie in §3.

Man würde hier, wie immer, die Definitionen 1.3, 1.4 und das Lemma 1.5 abschreiben, und dazu die Nummern 5.3, 5.4 und 5.5.

Der Hilfssatz 3.6 würde hier auch abgeschrieben, und dazu die Nummer 5.6. Der Beweis geht ganz genau wie bei 2.6, bis auf den Anfang der Induktion: $w\varepsilon\{\approx, f[\sim], g[\sim]\}$, und beim Induktionsschluss betrachtet man auch g[w] analog zu f[w].

Die Lemmas 4.7, und 4.9 werden hier kopiert, dafür die Nummerrn 5.7, und 5.9 gegeben.

5.8 Lemma: $w=[u\square v] \Rightarrow l(w)=l(u)+l(v)+3 \quad (u,v,w\in W_3)$

$w=f[u] \vee w=g[u] \Rightarrow l(w)=l(u)+3 \quad (u\in W_2)$

5.10 Hilfssatz: $w\in W_3 \Rightarrow \#_{[}(s_n(w))-\#_{]}(s_n(w)) > 0$, falls $\phi\neq s_n(w)\notin\{f,g\}, n > 0$

Jetzt kommen wir zum Satz der Eindeutigkeit der Darstellung eines Wortes:

5.11 Satz: i) $w\in W_3$, $w=[u\square v]=[u_1\square v_1], u,u_1\in W_3, v,v_1\in W_1 \Rightarrow u=u_1 \wedge v=v_1$

ii) $w,w'\in W_2, f[w]=f[w'] \Rightarrow w=w'$

iii) $w,w'\in W_2, g[w]=g[w'] \Rightarrow w=w'$

Die Beweise von 5.8, 5.10 und 5.11 sind analog zu den Beweisen von 3.8, 3.10, und 3.11

5.12 Lemma und Definition: $(W,S,\hat{X})$, wobei $W=(W_1,W_2,W_3)$, $S=(s_1,s_2,s_3,s_4,s_5)$,

$s_1: W_1\times W_1 \longrightarrow W_1$, $s_2: W_2\times W_1 \longrightarrow W_2$, $s_3: W_3\times W_1 \longrightarrow W_3$

$(u,v) \longmapsto [u\square v]$ $\quad (u,v) \longmapsto [u\square v]$ $\quad (u,v) \longmapsto [u\square v]$

$s_4: W_2 \longrightarrow W_3$, $s_5: W_2 \longrightarrow W_3$,

$u \longmapsto f[u]$ $\quad u \longmapsto g[u]$

$\hat{X}=(e_o,-,\sim,\approx)$ ist eine Peano-Algebra.

Beweis: $\forall\, i,j\in\{1,2,3,4,5\}, i\neq j \Rightarrow Bi(s_i)\cap Bi(s_j)=\phi$: klar nach §3-4.

Es ist klar, dass:

$\forall\, u\in W_1\cup W_2\cup W_3, \forall\, v\in W_1: \approx \neq [u\square v], \forall u\in W_2: \sim \neq f[u] \wedge \sim \neq g[u]$

Analog für e_o, - und $\sim$

Sei A(u) eine Aussage über $u\in W_1\cup W_2\cup W_3$, so dass gelten:

(1) $A(e_o)$, $A(-)$, $A(\sim)$, und $A(\approx)$.

(2) Gelten $A(u_1)$, $A(u_1')$, $A(u_2)$, $A(u_3)$, $u_1,u_1'\in W_1, u_2\in W_2, u_3\in W_3$, so gelten auch:

$A([u_1\square u_1'])$, $A([u_2\square u_1])$, $A([u_2\square u_1'])$, $A([u_3\square u_1])$, $A([u_3\square u_1'])$, $A(f[u_2])$, und $A(g[u_2])$

Zu zeigen $A(u)$ für alle $u \varepsilon W_1 \cup W_2 \cup W_3$

Man betrachte $\{u \varepsilon W_1 \cup W_2 \cup W_3 | A(u)\} = \{u \varepsilon W_1 | A(u)\} \cup \{u \varepsilon W_2 | A(u)\} \cup \{u \varepsilon W_3 | A(u)\}$

$\{u \varepsilon W_1 | A(u)\} = W_1$, $\{u \varepsilon W_2 | A(u)\} = W_2$,wie in §3

$\{u \varepsilon W_3 | A(u)\}$ erfüllt (i) nach (1),(ii) nach (2),und auch (iii) nach (2) ((i),(ii),(iii) bei Definition 5.1),aber W_3 ist die kleinste Teilmenge von Z,mit solchen Eigenschaften,also : $\{u \varepsilon W_3 | A(u)\} = W_3$ .Also folgt die Behauptung.

Wie immer,definieren wir:

$g_1 : W_1 \times N \times W_1 \times N \longrightarrow N$

$(u,r,v,s) \longmapsto r+s+(\#_{e_0}(v)+1)(\#_{e_0}([u \sqcup v])+1)-1$

$g_2 : W_2 \times N \times W_1 \times N \longrightarrow N$

$(u,r,v,s) \longmapsto r+s+(\#_{e_0}(v)+1)(\#_{e_0}([u \sqcup v])+1)-1$

$g_3 : W_3 \times N \times W_1 \times N \longrightarrow N$

$(u,r,v,s) \longmapsto r+s+(\#_{e_0}(v)+1)(\#_{e_0}([u \sqcup v])+1)-1$

$g_4 : W_2 \times N \longrightarrow N$

$(u,r) \longmapsto r+\#_{e_0}(u)+\#_{e_0}(u)+1$

$g_5 : W_2 \times N \longrightarrow N$

$(u,r) \longmapsto r+\#_{e_0}(u)+\#_{e_0}(u).$

Dann folgt nach 0.14,dass es genau eine Abbildung "Rg"(Rang) gibt, $Rg : W_1 \cup W_2 \cup W_3 \longrightarrow N$, so dass:

$Rg(e_0) = Rg(-) = Rg(\sim) = Rg(\simeq) = 0,$

$\forall\, u,v \varepsilon W_1 : Rg([u \sqcup v]) = Rg(s_1(u,v)) = g_1(u,Rg(u),v,Rg(v))$

$= Rg(u)+Rg(v)+(\#_{e_0}(v)+1)(\#_{e_0}([u \sqcup v])+1)-1$

$\forall\, u \varepsilon W_2, v \varepsilon W_1 : Rg([u \sqcup v]) = Rg(s_2(u,v)) = g_2(u,Rg(u),v,Rg(v))$

$= Rg(u)+Rg(v)+(\#_{e_0}(v)+1)(\#_{e_0}([u \sqcup v])+1)-1$

$\forall\, u \varepsilon W_3, v \varepsilon W_1 : Rg([u \sqcup v]) = Rg(s_3(u,v)) = g_3(u,Rg(u),v,Rg(v))$

$= Rg(u)+Rg(v)+(\#_{e_0}(v)+1)(\#_{e_0}([u \sqcup v])+1)-1$

$\forall\, u \varepsilon W_2 : Rg(f[u]) = Rg(s_4(u)) = g_4(u,Rg(u)) = Rg(u)+\#_{e_0}(u)+\#_{e_0}(u)+1$

$\forall\, u \varepsilon W_2 : Rg(g[u]) = Rg(s_5(u)) = g_5(u,Rg(u)) = Rg(u)+\#_{e_0}(u)+\#_{e_0}(u).$

5.13 Lemma: i) $(u,v,\varphi)\varepsilon K(\alpha,\beta,\varepsilon,\Psi) \Rightarrow$ a) $\|_{a_o}(u)=\|_{a_o}(v)$

b) $\|_{\ell_o}(u)=\|_{\ell_o}(v)$

ii) $(u,v,\varphi)\varepsilon K(\lambda,\rho,\sigma) \Rightarrow$ a) $\|_{b_o}(u)=\|_{b_o}(v)+1$

b) $\|_{\ell_o}(u)=\|_{\ell_o}(v)+1$

Beweis: wie bei 3.13 und 4.13

5.14 Satz: $(u,v,\varphi)\varepsilon K(\alpha,\lambda,\rho,\beta,\sigma,\varepsilon,\Psi) \Rightarrow Rg(v) < Rg(u)$.

Beweis: wie bei 1.14, 3.14 und 4.14

Wir definieren den Begriff"Weg" und dazu steht die Nummer 5.15

5.16 Die Bilder: Seien $(\mathfrak{C},\otimes,I)$ eine monoidale Kategorie, $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ zwei $\mathfrak{C}$-Kategorien, $\mathfrak{F}:\mathfrak{M}\longrightarrow\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{G}:\mathfrak{M}\longrightarrow\mathfrak{N}$ zwei $\mathfrak{C}$-Funktoren, $\Psi:\mathfrak{F}\longrightarrow\mathfrak{G}$ eine $\mathfrak{C}$-Transformation, $B\varepsilon Ob(\mathfrak{C})$, $X\varepsilon Ob(\mathfrak{M})$ und $Y\varepsilon Ob(\mathfrak{N})$.

Die Situation ist ähnlich zur Situation in 3.16 und 4.16: Die Worte bilden eine Peano-Algebra. Wir definieren wieder die $g_1,\ldots,g_5$ die mit den $s_1,\ldots,s_5$ korrespondieren. Also existiert genau eine Abbildung $h:W_1\cup W_2\cup W_3 \longrightarrow Ob(\mathfrak{C})\cup Ob(\mathfrak{M})\cup Ob(\mathfrak{N})$, so dass:

i) $h(e_o) = I$, $h(-) = B$, $h(\sim) = X$, $h(\tilde{\sim}) = Y$

ii) $\forall\, u,v\varepsilon W_1$: $h([u\square v]) = h(u)\otimes h(v) := u_B\otimes v_B$,

$\forall\, u\varepsilon W_2$: $h(f[u]) = \mathfrak{F}(h(u)) := \mathfrak{F}(u_B)$, $h(g[u]) = \mathfrak{G}(h(u)) := \mathfrak{G}(u_B)$

$\forall\, u\varepsilon W_2, v\varepsilon W_1$: $h([u\square v]) = h(u)\otimes h(v) := u_X\otimes v_B$

$\forall\, u\varepsilon W_3, v\varepsilon W_1$: $h([u\square v]) = h(u)\otimes h(v) := u_Y\otimes v_B$

Die Kanten bilden eine Peano-Algebra, so definieren wir die g's die die s's bzgl. der Kanten existieren. Es folgt nach 0.14, dass es genau eine Abbildung h_1 gibt,

$h_1:K(k_{\psi_i})\cup K(l_{\psi_i})\cup K(m_{\psi_i})\cup K(l_{\varphi_j})\cup K(m_{\varphi_j})\cup K(m_{\theta_k}) \longrightarrow \mathfrak{C}\cup\mathfrak{M}\cup\mathfrak{N}$, so dass:

$\forall\, \varphi\,\varepsilon\{\alpha,\lambda,\rho,\beta,\sigma,\varepsilon,\chi,\bar{\alpha}^1,\bar{\lambda}^1,\bar{\rho}^1,\bar{\beta}^1,\bar{\sigma}^1,\bar{\varepsilon}^1\}$: $h_1(u,v,\varphi) := (h(u),h(v),\varphi)$,

$\forall\, (u,v,\varphi)\varepsilon K(k_{\psi_i})\cup K(l_{\psi_i})\cup K(m_{\psi_i})\cup K(l_{\varphi_j})\cup K(m_{\varphi_j})\cup K(m_{\theta_k})$, $\forall\, w\varepsilon W_1\cup W_2\cup W_3$:

$h_1([w\square u],[w\square v],[1\square\varphi]) := (h([w\square u]),h([w\square v]),1\otimes\varphi)$, (so lange die Kante $([w\square u],[w\square v],[1\square\varphi])$ definiert ist.)

$h_1([u\square w],[v\square w],[\varphi\square 1]) := (h([u\square w]),h([v\square w]),\varphi\otimes 1)$, (so lange die

Kante ([u□w],[v□w],[φ□1]) definiert ist.),

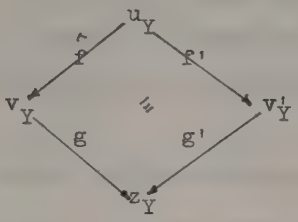
$\forall\ (u,v,\varphi)\in K(l_{\psi_i})\cup K(l_{\varphi_j})$:

$h_1(f[u],f[v],f[\varphi]) := \mathfrak{F}(h_1(u,v,\varphi))$,

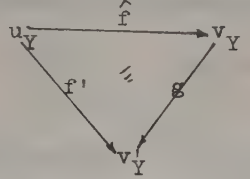
$h_1(g[u],g[v],g[\varphi]) := \mathfrak{G}(h_1(u,v,\varphi))$.

.17 Satz: $\forall (u,v,\hat{f}),(u,v',f')\varepsilon K(\alpha,\lambda,\rho,\beta,\sigma,\xi,\Psi), v\neq v', u,v,v'\varepsilon W_3$:

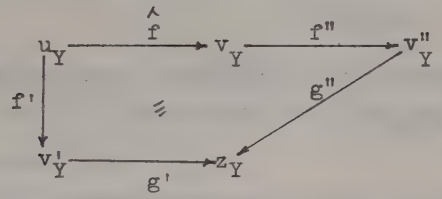
a) $\exists (v,z,g)\wedge(v',z,g')\varepsilon K(\alpha,\lambda,\rho,\beta,\sigma,\xi,\Psi)$ mit: $(z\varepsilon W_3)$



oder b) $\exists (v,v',g)\varepsilon K(\lambda,\rho,\sigma)$, mit:



oder c) $\exists (v',z,g'),(v,v'',f''),(z,v'',g'')\varepsilon K(\alpha,\beta,\xi)$, mit: $(z,v''\varepsilon W_3)$



Beweis: durch Induktion nach $\#_a(u)$:

Induktionsanfang: $\#_a(u)=0 \Rightarrow u\varepsilon\{\simeq, f[-], g[-]\}$

$u=\simeq \vee u=g[-] \Rightarrow$ Behauptung (trivial)

$u=f[-] \Rightarrow f=\Psi \wedge f'=\Psi \Rightarrow v=v'=g[u]$

Induktionsannahme: Sei Behauptung richtig für $\#_a(u) \leq n$

Induktionsschluss: $\#_a(u)= n+1, n>0$.

Zunächst bemerkt man, dass $:\forall\varphi\varepsilon\bar{K}(\xi,\Psi): f[\varphi] \wedge g[\varphi]$ nicht definiert sind. Dann, im Bezug auf Abschnitt 3 "Kohärenz der $\mathfrak{C}$-Funktoren", bleiben nur die folgenden Möglichkeiten:

$f=\alpha, f'=\Psi$: Es kann nicht auftreten, sonst: $u\varepsilon W_1 \wedge u\varepsilon W_2$, d.h. $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$.

Anderes Argument: Ein Wort kann nicht mit "[" ,und auch mit "f" anfangen.

$\hat{f}=\alpha, f'=1\square\Psi$: Es tritt nicht auf. Dasselbe Argument, wie beim ersten Fall (α,Ψ)

$\hat{f}=\lambda, f'=\Psi$: Es tritt nicht auf. Dasselbe Argument.

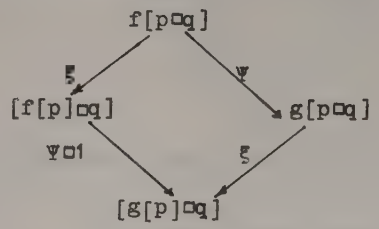
$\hat{f}=\rho, f'=\Psi$: Es tritt nicht auf. Dasselbe Argument.

$\hat{f}=\beta, f'=\Psi$: Es tritt nicht auf, da ein Wort nicht mit "[" und auch mit "f" anfangen kann.

$\hat{f}=\beta, f'=[1\square\Psi]$: Es tritt nicht auf, dasselbe Argument wie beim Fall (β,Ψ).

$\hat{f}=\sigma, f'=\Psi$: Es tritt nicht auf, dasselbe Argument wie beim Fall (β,Ψ)

$\hat{f}=\xi, f'=\Psi$:



Das Bild ist ein kommutatives Diagramm nach Voraussetzung (Ψ ist eine $\mathfrak{C}$-Transformation.)

$\hat{f}=\Psi, f'=\Psi \Rightarrow v=v'$

$\hat{f}=\Psi, f'=1\square y, y\varepsilon\bar{K}(\alpha,\lambda,\rho,\beta,\sigma,\xi,\Psi)$: Es tritt nicht auf, dasselbe Argument wie beim Fall (β,Ψ)

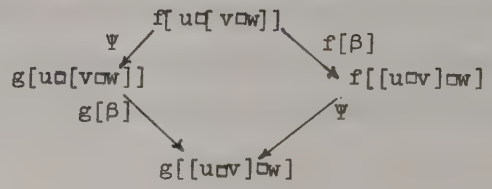
$\hat{f}=\Psi, f'=y\square 1$: Es tritt nicht auf, dasselbe Argument.

$\hat{f}=\Psi, f'=f[\alpha]$: Es tritt nicht auf, sonst $u\varepsilon W_1 \wedge u\varepsilon W_2$, d.h. $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$

$\hat{f}=\Psi, f'=f[\lambda]$: Es tritt nicht auf, dasselbe Argument wie beim Fall $(\Psi, f[\alpha])$.

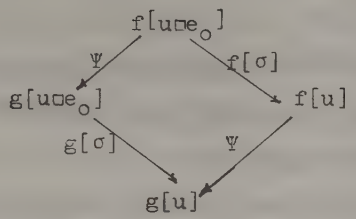
$\hat{f}=\Psi, f'=f[\rho]$: Es tritt nicht auf, dasselbe letzte Argument.

$\hat{f}=\Psi, f'=f[\beta]$:



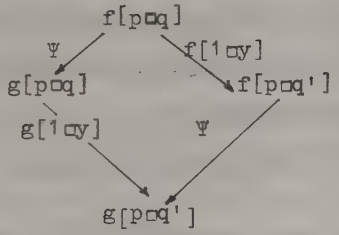
Das Bild ist ein kommutatives Diagramm, da Ψ eine natürliche Transformation ist.

$\hat{f}=\Psi, f'=f[\sigma]$



Das Bild ist ein kommutatives Diagramm, da Ψ eine natürliche Transformation ist.

$\hat{f}=\Psi, f'=f[1\square y], y\varepsilon\overline{K}(\alpha,\lambda,\rho,\beta,\sigma)$:



Das Bild ist ein kommutatives Diagramm ist, da Ψ eine natürliche Transformation ist.

$\hat{f}=\Psi, f'=f[y\square 1]$: analog zum letzten Fall $(\Psi, f[1\square y])$

$\hat{f}=\Psi, f'=g[y], y\varepsilon\overline{K}(\alpha,\lambda,\rho,\beta,\sigma)$: Es tritt nicht auf, sonst hat das Wort u die Gestalt f[p] und auch g[q], wobei p und q εW_2 sind.

Also folgt die Behauptung.

Man kopiert hier Lemma 3.18 und gibt die Nummer 5.18

19 Definition: Wir definieren das Wort $w^{(n)}$ rekursiv:

$w^{(1)}=\sim$ V $w^{(1)}=g[\cdot]$

$w^{(2)}=[w^{(1)}\square -]$

$w^{(n)}=[w^{(n-1)}\square -]$

Jedem Wort $w\varepsilon W_\Sigma$ ordenen wir $w^{(\#_f(w)+1)}$, wobei $w^{(1)}=\sim$ falls $\#_f(w)+\#_g(w) = 0$, und $w^{(1)}=g[-]$ falls $\#_f(w)+\#_g(w) = 1$

Das ist eine wohldefinierte Abbildung. $w^{(n)}$ heisst Standardwort.

Ganz analog zu 3.19 zeigt man, dass falls ein Weg zwischen zwei Worten existiert, dann haben die beiden Worte dasselbe Standard Wort.

5.20 Lemma: Von $w \varepsilon W_3$ nach $w^{(\#_-(w)+1)}$ existiert mindstens ein Weg mit Kanten aus $K(\alpha,\beta,\xi,\Psi)$, wobei $\#_{\xi}(w)=0, w \neq w^{(\#_-(w)+1)}$

Beweis: durch Induktion nach $\#_-(w)$:

Induktionsanfang: $\#_-(w)=0 \Rightarrow w=\sim$ V $w=f[\sim]$ $Vw=g[\sim]$. $\sim$ und $g[\sim]$ sind Standardworte. Von $f[\sim]$ nach $g[\sim]$ gibt es die Pfeilkante $\Psi \Rightarrow$ Behauptung.

Induktionsannahme: Sei Behauptung richtig für $\#_-(w) \leq n$

Induktionsschluss: $\#_-(w)=n+1$:ganz analog zu 3.20. Falls $w=f[u \square v]$ wendet man zunächst Ψ, also hat man $g[u \square v]$, dann geht das Verfahren genau wie bei 3.20 falls $w=f[u \square v]$

Jetzt bekommen wir von 5.18 und 5.20 den Satz:

5.21 Satz: Es gibt einen Weg von w nach $w^{(\#_-(w)+1)}$, mit Kanten aus $K(\alpha,\lambda,\rho,\beta,\sigma,\xi,\Psi)$, wobei $w \varepsilon W_3, w \neq w^{(\#_-(w)+1)}$.

5.22 Bemerkung: $w \varepsilon W_3 \Rightarrow Rg(w) \geq 0$, mit $Rg(w) = 0 \Leftrightarrow w \varepsilon \{w | w = w_{st.}\}$

Beweis: ganz genau wie bei 3.22, mit der Bemerkung $Rg(f[\sim])=1$, aber $f[\sim]$ ist kein Standardwort, während $Rg(g[\sim])=0$, $g[\sim]$ ist ein Standardwort.

Jetzt erreichen wir unseren grossen Satz:

5.23 Hauptsatz:

Seien $(\mathfrak{C},\otimes,I)$ eine monoidale Kategorie, $\mathfrak{M},\mathfrak{N}$ zwei $\mathfrak{C}$-Kategorien, $\mathfrak{F}:\mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{N}, \mathfrak{G}:\mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{N}$ zwei $\mathfrak{C}$-Funktoren, $\Psi:\mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{G}$ eine $\mathfrak{C}$-Transformation, $B \varepsilon Ob(\mathfrak{C}), X \varepsilon Ob(\mathfrak{M}), Y \varepsilon Ob(\mathfrak{N})$.

Seien P und Q Objekte aus $\mathfrak{N}$, die auf folgende Weise konstruiert sind:

Zur Konstruktion von P: Man wähle n Kopien von $B \in Ob(\mathfrak{C})$, tensoriere $X \in Ob(\mathfrak{R})$ mit einem Teil der Kopien von B und eventuell weiteren Objekten $I \in Ob(\mathfrak{C})$, wende darauf den Funktor $\mathfrak{F}$ oder den Funktor $\mathfrak{G}$ an, und tensoriere das Ergebnis mit den restlichen B und eventuell weiteren Objekten $I \in Ob(\mathfrak{C})$, alternativ: Man tensoriere $Y \in Ob(\mathfrak{R})$, mit den n Kopien von B und eventuell weiteren Objekten $I \in Ob(\mathfrak{C})$.

Zur Konstruktion von Q: Q sei das Tensorprodukt von $\mathfrak{G}(X)$ bzw. Y (je nachdem P mit X oder mit Y konstruiert ist) mit den n Kopien von B, wobei die Klammen nach links gezogen seien. Genauer:

Seien $P = u_X$ (bzw. u_Y) und $Q = v_X$ (bzw. v_Y) Bilder von zwei Worten $u, v \in W_3$, beim Einsetzen von X bzw. Y, und B, und sei v das Standardwort zu u. Dann gibt es genau einen Morphismus $\varphi: P \longrightarrow Q$, der sich aus Morph. zusammensetzt, die sich als Tensorprodukte von $\alpha, \lambda, \rho, \beta, \sigma, \xi, \Psi, \bar{\alpha}^1, \bar{\lambda}^1, \bar{\rho}^1, \bar{\beta}^1, \bar{\sigma}^1, \bar{\xi}^1$ und Identitäten darstellen lassen, genauer: so dass $\varphi: P \longrightarrow Q$ Bild eines Weges von u nach v beim Einsetzen von X bzw. Y, und B ist.

Beweis: analog zu 1.24.

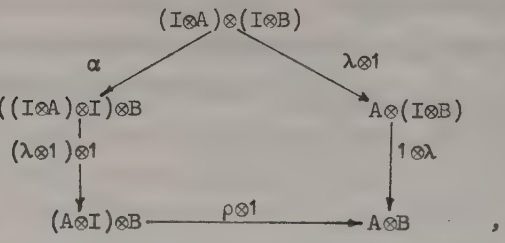
5.24 Bemerkung:

Auch hier, wie in §4, da Ψ kein Isomorphismus ist, sind die Wege nicht beliebig gewählt, sondern müssen in Standardworten enden.

§6 Verallgemeinerung

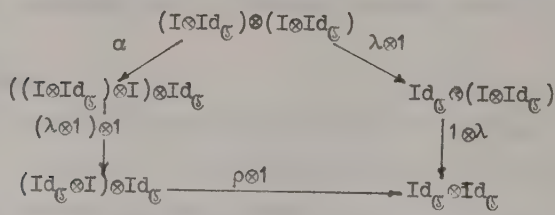
6.1 Motivation: In den Beweisen der Sätze haben wir die Abbildungen zwischen den Objekten der Kategorien und den Worten in einer "speziellen Art" konstruiert. Zum Beispiel beim ersten Satz, dem $\mathfrak{C}$-Kategorie Satz, haben wir die Abbildung : $W \longrightarrow Ob(\mathfrak{C})$ durch $e_o \longmapsto I, - \longmapsto B$, wobei $B \in Ob(\mathfrak{C})$, und die Abbildung: $U \longrightarrow Ob(\mathfrak{M})$, wobei $\mathfrak{M}$ eine $\mathfrak{C}$-Kategorie, ist durch $\sim \longmapsto X$, $X \in Ob(\mathfrak{M})$ konstruiert.

Die folgende Frage stellt sich: Was könnte passieren, wenn wir ein solches Diagramm hätten:



kommutiert auch dieses Diagramm?. Das ist kein Bild nach unserer Abbildung.

Das Diagramm ist jedoch kommutativ. Um das zu beweisen, konstruieren wir eine monoidale Kategorie, deren Objekte im wesentlichen Funktoren von $\mathfrak{C}\times\ldots\times\mathfrak{C}$ nach $\mathfrak{C}$ sind und deren Morphismen natürliche Transformationen zwischen diesen Funktoren sind. Dann kommutiert nach §1



als Diagramm von Funktoren auf $\mathfrak{C}\times\mathfrak{C}$. Durch Auswerten auf (A,B) erhalten wir dann das gewünschte Diagramm. Diese Idee geht auf Mac Lane zurück.

In seinem Buch "Categories for the Working Mathematician" beweist er dort :

Corollary: Let B be a monoidal category. There is a function which assigns to each pair of words v,w of the same length n a (unique) natural isomorphism

$$can_B(v,w): v_B \longrightarrow w_B : B^n \longrightarrow B$$

called the canonical map from v_B to w_B, in such a way that the identity arrow e $\longrightarrow$ e is canonical (between functors of 0 variables), the identity transformation $id_B: I_B \longrightarrow I_B$ is canonical, $\alpha, \bar{\alpha}^1, \lambda, \bar{\lambda}^1, \rho$ and $\bar{\rho}^1$ are canonical, and the composite as well as the $\square$-product of two canonical maps is canonical.

Pareigis hat in einem Brief an Mac Lane am 23.6.1977 ein Gegenbeispiel zu dieser Formulierung gegeben, wenn die sogenannten "basic arrows" zwischen Funktoren nicht formal zwischen Worten definiert sind. Hier ist das Gegenbeispiel:

Let M be a (set-theoretic) monoid, $\varphi: M \longrightarrow M$ an endomorphism with $\varphi^2 = \varphi$ and $\varphi(M) \subset C(M)$ = center of M. Let $a \in M$ be invertible, $a \neq 1$, $a \in C(M)$ and $\varphi(a) = 1$. (e.g. $M = Z \times Z$, $\varphi(x,y) = (x,0)$ and $a = (0,1)$)

Category $\mathbb{C}$: Objects: $\{I,X\}$

$$Mor_{\mathbb{C}}(I,I) = \{1\}\ ,\ Mor_{\mathbb{C}}(X,X) = M, \text{nothing else.}$$

$\otimes: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$: $X \otimes I = I \otimes X = X \otimes X = X$, $I \otimes I = I$

$I \otimes f = f \otimes I = f$,

$f \otimes g := f\varphi(g)$ for $f,g \in M$. This is a functor.

λ, ρ : Since $I \otimes -$ and $- \otimes I$ is the identity functor, set $\lambda = \rho = 1$.

α : $\alpha: A \otimes (B \otimes C) \longrightarrow (A \otimes B) \otimes C$ is the identity if one A, B or C is I.

$[\alpha: X \otimes (X \otimes X) \longrightarrow (X \otimes X) \otimes X] = a$

Check: α is natural isomorphism and all coherence diagrams commute. Hence $\mathbb{C}$ is monoidal.

Now if v and w are words of "length n" then $v_{\mathfrak{C}} = w_{\mathfrak{C}}$ as functors from $\mathfrak{C}^n \longrightarrow \mathfrak{C}$. So the identities for F and G given by:

$F := Id_{\mathfrak{C}} \otimes (Id_{\mathfrak{C}} \otimes (Id_{\mathfrak{C}} \otimes Id_{\mathfrak{C}})) = (Id_{\mathfrak{C}} \otimes (Id_{\mathfrak{C}} \otimes Id_{\mathfrak{C}})) \otimes Id_{\mathfrak{C}}$

$G := Id_{\mathfrak{C}} \otimes ((Id_{\mathfrak{C}} \otimes Id_{\mathfrak{C}}) \otimes Id_{\mathfrak{C}}) = ((Id_{\mathfrak{C}} \otimes Id_{\mathfrak{C}}) \otimes Id_{\mathfrak{C}}) \otimes Id_{\mathfrak{C}}$, where $Id_{\mathfrak{C}} : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{C}$ is the identity functor, hold. But

$Id_{\mathfrak{C}} \otimes \alpha_{(X,X,X,X)} = \varphi(a) = 1$ and

$\alpha \otimes Id_{\mathfrak{C}}\ (X,X,X,X) = a \neq 1.$

Man muss die Diagramme also immer formal sowohl in Bezug auf die Morphismen, als auch auf die Objekte betrachten, d.h. immer auf dem Niveau der Worte und Kanten. Beim Übergang zum Bild kann immer Information verloren gehen.

6.2. Monoidale Kategorie $(\mathbb{C},\otimes,I)$:

Seien $S:\mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}, T:\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$; $m,n\in N$ Funktoren.

Wir definieren: $S\otimes T:\mathbb{C}^{m+n} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$S\otimes T(A_1,\ldots,A_{m+n}) := S(A_1,\ldots,A_m)\otimes T(A_{m+1},\ldots,A_{m+n}),$$

$$A_1,\ldots,A_{m+n} \in Ob(\mathbb{C})$$

Wir konstruieren eine monoidale Kategorie $It(\mathbb{C})$ wie folgt:

Die Objekte in $It(\mathbb{C})$ sind die Paare $\langle m, S\rangle$, wobei $S:\mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}$ Funktor; die Morphismen sind so definiert:

$$Mor_{It(\mathbb{C})}(\langle m,S\rangle,\langle n,T\rangle) = \begin{cases} \emptyset & ,m\neq n \\ Mor_{f.}(S,T) & ,m=n \end{cases}$$

Jetzt definieren wir das Tensorprodukt $\boxtimes$ auf $It(\mathbb{C})$:

$\langle m, S\rangle \boxtimes \langle n, T\rangle := \langle m+n, S\otimes T\rangle$, das ist wohldefiniert da $S\otimes T$ Funktor, $S\otimes T:\mathbb{C}^{m+n} \longrightarrow \mathbb{C}$.

Seien $T,T':\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ Funktoren, $S,S':\mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}$ Funktoren,

Mor $It(\mathbb{C}) \ni f : T \longrightarrow T'$ funktorieller Morphismus,

Mor $It(\mathbb{C}) \ni g : S \longrightarrow S'$ funktorieller Morphismus.

$$\boxtimes(f,g) := f\otimes g$$

$\boxtimes$ ist Triviallerweise Bifunktor, da $\otimes$ Bifunktor ist.

Jetzt definieren wir das ausgezeichnete Element $\langle 0,\tilde{I}\rangle$ in $It(\mathbb{C})$:

$\tilde{I} := (E \ni . \longmapsto I\in\mathbb{C})$, wobei E einelementige Menge ist. Man bemerkt, dass $\tilde{I}$ betrachtet als Funktor von $\mathbb{C}^0 \longrightarrow \mathbb{C}$ ist.

Jetzt ist zu zeigen, dass $(It(\mathbb{C}),\boxtimes,\langle 0,\tilde{I}\rangle)$ monoidale Kategorie ist. Wir bestimmen zunächst die natürliche Isomorphismen α,λ,ρ.

Bestimmung von $\hat{\alpha}$:

Seien $R:\mathbb{C}^l \longrightarrow \mathbb{C}, S:\mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}, T:\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}, m,n,l\in N.$

$\langle l,R\rangle \boxtimes (\langle m,S\rangle \boxtimes \langle n,T\rangle) = \langle l+m+n, R\otimes(S\otimes T)\rangle$

$(\langle l,R\rangle \boxtimes \langle m,S\rangle) \boxtimes \langle n,T\rangle = \langle l+m+n, (R\otimes S)\otimes T\rangle$

$(R\otimes(S\otimes T))(A_1,\ldots,A_{l+m+n}) = R(A_1,\ldots,A_l)\otimes(S(A_{l+1},\ldots,A_{l+m})\otimes T(A_{l+m+1},\ldots,A_{l+m+n}))$

analog: $((R\otimes S)\otimes T)(A_1,\ldots,A_{l+m+n}) =$

$(R(A_1,\ldots,A_l)\otimes S(A_{l+1},\ldots,A_{l+m}))\otimes T(A_{l+m+1},\ldots,A_{l+m+n})$

$l+m+n,R\otimes(S\otimes T) \overset{\hat{\alpha}}{\cong} l+m+n,(R\otimes S)\otimes T$,d.h.

$R(A_1,\ldots,A_l)\otimes(S(A_{l+1},\ldots,A_{l+m})\otimes T(A_{l+m+1},\ldots,A_{l+m+n}))$

$\overset{\hat{\alpha}}{\cong}(R(A_1,\ldots,A_l)\otimes S(A_{l+1},\ldots,A_{l+m}))\otimes T(A_{l+m+1},\ldots,A_{l+m+n})$.

Wir wählen $\hat{\alpha}=\alpha$,wobei α der korrespondierende natürliche Isomorphismus in $\mathfrak{C}$.

Bestimmung von $\hat{\lambda}$:

Sei $T:\mathfrak{C}^n \longrightarrow \mathfrak{C}$ ein Funktor.Wir haben:

$\langle 0,\tilde{I}\rangle \boxtimes \langle n,T\rangle = \langle n,\tilde{I}\otimes T\rangle$ .Also $\langle n,\tilde{I}\otimes T\rangle \overset{\hat{\lambda}}{\cong} \langle n,T\rangle$.Aber

$(\tilde{I}\otimes T)(A_1,\ldots,A_n) = \tilde{I}(.)\otimes T(A_1,\ldots,A_n)=I\otimes T(A_1,\ldots,A_n)$,$A_1,\ldots,A_n\varepsilon Ob(\mathfrak{C})$.

d.h. $I\otimes T(A_1,\ldots,A_n)\overset{\hat{\lambda}}{\cong}T(A_1,\ldots,A_n)$.

Man wähle $\hat{\lambda}=\lambda$,wobei λ der korrespondierende natürliche Isomorphismus in $\mathfrak{C}$ ist.

Analog definiert man $\hat{\rho}=\rho$,wobei ρ der korrespondierende natürliche Isomorphismus in $\mathfrak{C}$ ist.

Zu zeigen,dass $\hat{\alpha}$ natürlicher Isomorphismus ist:

Seien $R:\mathfrak{C}^l \longrightarrow \mathfrak{C}$,$R':\mathfrak{C}^l \longrightarrow \mathfrak{C}$,$S:\mathfrak{C}^m \longrightarrow \mathfrak{C}$,$S':\mathfrak{C}^m \longrightarrow \mathfrak{C}$,

$T:\mathfrak{C}^n \longrightarrow \mathfrak{C}$,$T':\mathfrak{C}^n \longrightarrow \mathfrak{C}$ Funktoren,

Mor It$(\mathfrak{C})\ni f:R \longrightarrow R'$ funktorieller Morphismus,

Mor It$(\mathfrak{C})\ni g:S \longrightarrow S'$ funktorieller Morphismus,

Mor It$(\mathfrak{C})\ni h:T \longrightarrow T'$ funktorieller Morphismus.

$$\begin{array}{ccc}
\langle 1,R\rangle\boxtimes(\langle m,S\rangle\boxtimes\langle n,T\rangle) & \overset{\hat{\alpha}(R,S,T)}{\cong} & (\langle 1,R\rangle\boxtimes\langle m,S\rangle)\boxtimes\langle n,T\rangle \\
\downarrow f\otimes(g\otimes h) & & \downarrow (f\otimes g)\otimes h \\
\langle 1,R'\rangle\boxtimes(\langle m,S'\rangle\boxtimes\langle n,T'\rangle) & \overset{\hat{\alpha}(R',S',T')}{\cong} & (\langle 1,R'\rangle\boxtimes\langle m,S'\rangle)\boxtimes\langle n,T'\rangle
\end{array}$$

kommutativ $\Leftrightarrow$

$$
\begin{array}{ccc}
R\otimes(S\otimes T)(A_1,\ldots,A_{l+m+n}) & \overset{\hat{\alpha}}{\cong} & (R\otimes S)\otimes T(A_1,\ldots,A_{l+m+n}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
f\otimes(g\otimes h)(A_1,\ldots,A_{l+m+n}) & & (f\otimes g)\otimes h(A_1,\ldots,A_{l+m+n}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
R'\otimes(S'\otimes T')(A_1,\ldots,A_{l+m+n}) & \overset{\hat{\alpha}}{\cong} & (R'\otimes S')\otimes T'(A_1,\ldots,A_{l+m+n})
\end{array}
$$

kommutativ $\Leftrightarrow$

$$
\begin{array}{ccc}
R(A_1,\ldots,A_l)\otimes(S(A_{l+1},\ldots,A_{l+m})\otimes T(A_{l+m+1},\ldots,A_{l+m+n})) & \overset{\alpha}{\cong} & R(*)\otimes(S(\overset{*}{*})\otimes T(\overset{**}{*})) \\
\downarrow & & \downarrow \\
f(A_1,\ldots,A_l)\otimes(g(A_{l+1},\ldots,A_{l+m})\otimes h(A_{l+m+1},\ldots,A_{l+m+n})) & & f(*)\otimes(g(\overset{*}{*})\otimes h(\overset{**}{*})) \\
\downarrow & & \downarrow \\
R'(A_1,\ldots,A_l)\otimes(S'(A_{l+1},\ldots,A_{l+m})\otimes T'(A_{l+m+1},\ldots,A_{l+m+n})) & \overset{\alpha}{\cong} & R'(*)\otimes(S'(\overset{*}{*})\otimes T'(\overset{**}{*}))
\end{array}
$$

(*bedeutet $A_1,\ldots,A_l$; $\overset{*}{*}$ bedeutet $A_{l+1},\ldots,A_{l+m}$; $\overset{**}{*}$ bedeutet: $A_{l+m+1},\ldots,A_{l+m+n}$)

kommutiert. Das letzte Diagramm kommutiert, da α natürliche Transformation ist.

Zu zeigen dass $\hat{\lambda}$ natürlicher Isomorphismus ist:

Seien $S:\mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}$, $S':\mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}$, $m\in\mathbb{N}$ Funktoren,

Mor $\mathrm{It}(\mathbb{C}) \ni f: S \longrightarrow S'$ funktorieller Morphismus

$$
\begin{array}{ccc}
\langle 0,\tilde{I}\rangle\otimes\langle m,S\rangle & \overset{\hat{\lambda}_S}{\cong} & \langle m,S\rangle \\
\downarrow \mathrm{id}\otimes f & & \downarrow f \\
\langle 0,\tilde{I}\rangle\otimes\langle m,S'\rangle & \overset{\hat{\lambda}_{S'}}{\cong} & \langle m,S'\rangle
\end{array}
\qquad \text{kommutativ } \Leftrightarrow \qquad
\begin{array}{ccc}
\langle m,\tilde{I}\otimes S\rangle & \overset{\hat{\lambda}_S}{\cong} & \langle m,S\rangle \\
\downarrow \mathrm{id}\otimes f & & \downarrow f \\
\langle m,\tilde{I}\otimes S'\rangle & \overset{\hat{\lambda}_{S'}}{\cong} & \langle m,S'\rangle
\end{array}
\text{ kommutativ } \Leftrightarrow
$$

$$
\begin{array}{ccc}
(\tilde{I}\otimes S)(A_1,\ldots,A_m) & \overset{\hat{\lambda}_S}{\cong} & S(A_1,\ldots,A_m) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{id}\otimes f(A_1,\ldots,A_m) & & f(A_1,\ldots,A_m) \\
\downarrow & & \downarrow \\
(\tilde{I}\otimes S')(A_1,\ldots,A_m) & \overset{\hat{\lambda}_{S'}}{\cong} & S'(A_1,\ldots,A_m)
\end{array}
\qquad \text{kommutativ } \Leftrightarrow
$$

$$
\begin{array}{ccc}
I\otimes S(A_1,\ldots,A_m) & \overset{\lambda_S}{\cong} & S(A_1,\ldots,A_m) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{id}\otimes f(A_1,\ldots,A_m) & & f(A_1,\ldots,A_m) \\
\downarrow & & \downarrow \\
I\otimes S'(A_1,\ldots,A_m) & \overset{\lambda_{S'}}{\cong} & S'(A_1,\ldots,A_m)
\end{array}
\qquad \text{kommutativ.}
$$

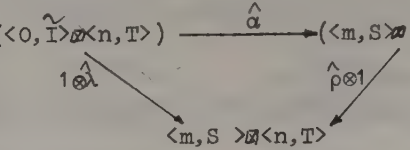
Das letzte Diagramm kommutiert, da λ natürliche Isomorphismus ist.

Zu zeigen dass $\hat{\rho}$ natürlicher Isomorphismus ist:

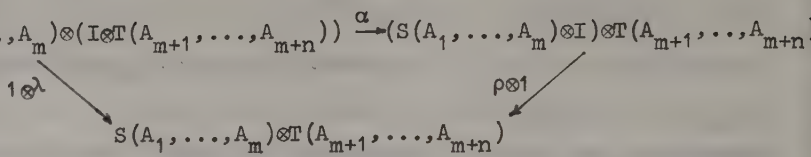
Analog zu λ .

Wir zeigen jetzt, dass $(It(\mathcal{C}),\otimes,\langle 0,\tilde{I}\rangle)$ eine monoidale Kategorie ist.

Seien $S:\mathcal{C}^m \longrightarrow \mathcal{C}$, $T:\mathcal{C}^n \longrightarrow \mathcal{C}$, $m,n\in N$, Funktoren.

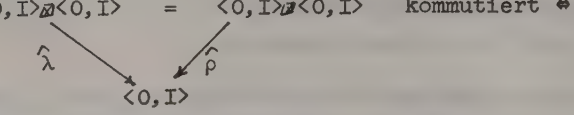


kommutiert $\Leftrightarrow$



kommutiert. $\mathcal{C}$ ist monoidal, also kommutiert das letzte Diagramm.

$\tilde{I}\otimes\tilde{I}(.) = \tilde{I}(.)\otimes\tilde{I}(.) = I\otimes I$, also:



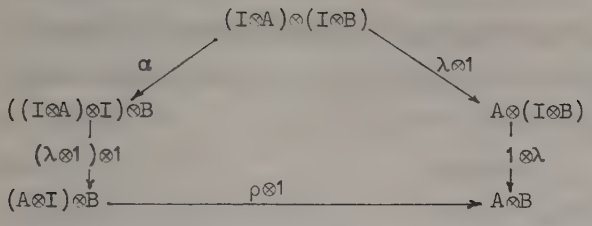
kommutiert. Das letzte Diagramm kommutiert, da $\mathcal{C}$ monoidal ist. Rest analog.

Analog zu 1.16, können wir eine Abbildung von W_1 nach $It(\mathcal{C})$ konstruieren, durch: $e_o \longmapsto \langle 0,\tilde{I}\rangle$, $- \longmapsto \langle 1,Id_{\mathcal{C}}\rangle$

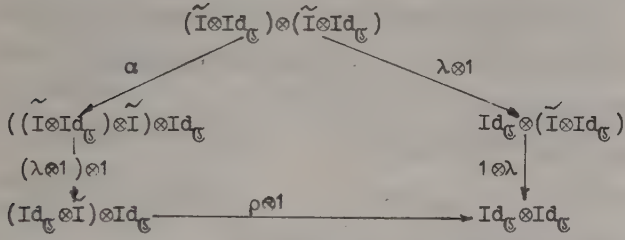
Jetzt haben wir den folgenden Satz:

<u>Satz</u>: Seien A und B Objekte von $\mathcal{C}$, die als Tensorprodukte von Objekten X_i aus $\mathcal{C}$ $(i=1,\ldots,n)$ und weiteren Kopien von I dargestellt sind, genauer: Seien $A=u_{Id_{\mathcal{C}}}(X_1,\ldots,X_n)$ und $B=v_{Id_{\mathcal{C}}}(X_1,\ldots,X_n)$ Bilder von zwei Worten $u,v\in W_1$ beim Einsetzen von $Id_{\mathcal{C}}$ und $X_1,\ldots,X_n$. Dann gibt es genau einen Morphismus $\varphi:A \longrightarrow B$, der sich aus Morphismen zusammensetzt, die sich als Tensorprodukte von $\alpha,\lambda,\rho,\bar{\alpha}^1,\bar{\lambda}^1,\bar{\rho}^1$ und Identitäten darstellen lassen, genauer: u und v bestimmen genau einen Morphismus $\varphi:A \longrightarrow B$, der Bild eines Weges von u nach v bei Einsetzen von $Id_{\mathcal{C}},X_1,\ldots,X_n$ ist.

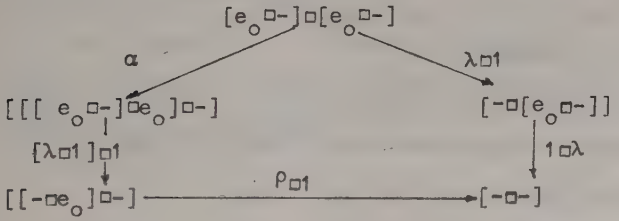
Beispiel:



kommutiert, wenn



kommutiert. Aber das letzte Diagramm kommutiert, da es das Bild von dem folgenden Diagramm ist, und It(𝔈) monoidal ist.



6.3 $\mathbb{C}$-Kategorien: Gegeben seien eine monoidale Kategorie $\mathbb{C}$, und eine $\mathbb{C}$-Kategorie $\mathfrak{M}$.

Wir konstruieren eine It($\mathbb{C}$)-Kategorie genannt It($\mathfrak{M}$), wie folgt:

Die Objekten in It($\mathfrak{M}$) sind die Paare $\langle m,S\rangle$, wobei $S:\mathfrak{M}\times\mathbb{C}^m \longrightarrow \mathfrak{M}$, $m\in N$ ein Funktor ist.

Die Morphismen sind so definiert:

$$\mathrm{Mor}_{\mathrm{It}(\mathfrak{M})}(\langle m,S\rangle,\langle m',S'\rangle)=\begin{cases}\phi & , m\neq m'\\ \mathrm{Mor}_{f.}(S,S') & , m=m'\end{cases}$$

wobei $S:\mathfrak{M}\times\mathbb{C}^m \longrightarrow \mathfrak{M}$, $S':\mathfrak{M}\times\mathbb{C}^{m'} \longrightarrow \mathfrak{M}$, $m,m'\in N$ Funktoren

Wir definieren $S\otimes T:= \otimes\circ(S\times T)$

$$S\otimes T:= \mathfrak{M}\times\mathbb{C}^{m+n} \longrightarrow \mathfrak{M}$$

$$S\otimes T(X,A_1,\ldots,A_{m+n})=S(X,A_1,\ldots,A_m)\otimes T(A_{m+1},\ldots,A_{m+n}),$$

wobei $X\in Ob(\mathfrak{M}), A_1,\ldots,A_{m+n}\in Ob(\mathbb{C})$

Wir definieren das Tensorprodukt der Kategorie: $\boxtimes$:

$\langle m,S\rangle\boxtimes\langle n,T\rangle := \langle m+n, S\otimes T\rangle$, wobei $\langle n,T\rangle\in Ob(It(\mathbb{C}))$, $\langle m,S\rangle\in Ob(It(\mathfrak{M}))$

Seien $f\in Mor(It(\mathfrak{M}))$, $g\in Mor(It(\mathbb{C}))$, $\boxtimes(f,g):=f\otimes g$

$\boxtimes$ ist Bifunktor, da $\otimes$ Bifunktor ist.

Beweis: 1) $\forall\, f,f'\in Mor(It(\mathfrak{M})), g,g'\in Mor(It(\mathbb{C}))$:

$\boxtimes((f',g')\circ(f,g))=\boxtimes(f'\circ f,g'\circ g)=$(nach Definition) $f'\circ f\otimes g'\circ g$

$=(f'\otimes g')\circ(f\otimes g)=$(nach Definition) $\boxtimes(f',g')\circ\boxtimes(f,g)$

2) S,T wie oben gegeben:

$\boxtimes(1_{\langle m,S\rangle},1_{\langle n,T\rangle})(\langle m,S\rangle\boxtimes\langle n,T\rangle)=\langle m,S\rangle\boxtimes\langle n,T\rangle=\langle m+n,S\otimes T\rangle$

$=1_{\langle m+n,S\otimes T\rangle}\langle m+n,S\otimes T\rangle = 1_{\langle m,S\rangle\boxtimes\langle n,T\rangle}(\langle m,S\rangle\boxtimes\langle n,T\rangle)\Rightarrow$ Behauptung.

Wir bestimmen die natürlichen Isomorphismen $\hat{\beta}$ und $\hat{\sigma}$

Seien $R:\mathfrak{M}\times\mathbb{C}^l \longrightarrow \mathfrak{M}$, $S:\mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}$, $T:\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$, $l,m,n\in N$, Funktoren

$$\langle l,R\rangle\boxtimes(\langle m,S\rangle\boxtimes\langle n,T\rangle)=\langle l+m+n, R\otimes(S\otimes T)\rangle \overset{\hat{\beta}}{\cong} \langle l+m+n,(R\otimes S)\otimes T\rangle$$

$$= (\langle l,R\rangle\boxtimes\langle m,S\rangle)\boxtimes\langle n,T\rangle$$

Seien $X\in Ob(\mathfrak{M}), A_1,\ldots,A_{l+m+n}\in Ob(\mathbb{C})$:

$\langle l,R\rangle\boxtimes(\langle m,S\rangle\ \langle n,T\rangle)(X,A_1,\ldots,A_{l+m+n})=$

$\langle l+m+n, R(X,A_1,\ldots,A_l)\otimes(S(A_{l+1},\ldots,A_{l+m})\otimes T(A_{l+m+1},\ldots,A_{l+m+n}))\rangle$

$\hat{\beta} \cong \langle 1+m+n, (R(X,A_1,\ldots,A_l) \otimes S(A_{l+1},\ldots,A_{l+m})) \otimes T(A_{l+m+1},\ldots,A_{l+m+n})\rangle$

$= (\langle 1,R\rangle \boxtimes \langle m,S\rangle) \boxtimes \langle n,T\rangle (X,A_1,\ldots,A_{l+m+n})$

Wir wählen $\hat{\beta}=\beta$, wobei β der korrespondierende natürliche Isomorphismus in $\mathfrak{M}$ ist.

Zu zeigen, dass $\hat{\beta}$ natürlicher Isomorphismus ist:

Analog zu α in 2)

Sei $S:\mathfrak{M}\times\mathfrak{C}^m \longrightarrow \mathfrak{M}, \tilde{I}:=(E\mapsto . \longrightarrow I\varepsilon\mathfrak{C})$, wie vorher:

$\langle m,S\rangle \boxtimes \langle 0,\tilde{I}\rangle = \langle m, S\otimes\tilde{I}\rangle$, also: $\langle m, S\otimes\tilde{I}\rangle \overset{\hat{g}}{\cong} \langle m,S\rangle$

Aber $\langle S\otimes\tilde{I}\rangle(A_1,\ldots,A_m) = S(A_1,\ldots,A_m)\otimes\tilde{I}(.) = S(A_1,\ldots,A_m)\otimes I$

Dann ist $S(A_1,\ldots,A_m)\otimes I \overset{\hat{g}}{\cong} S(A_1,\ldots,A_m)$

Wir wählen $\hat{\sigma}=\sigma$, wobei σ der korrespondierende natürliche Isomorphismus in $\mathfrak{M}$ ist.

Es ist leicht zu zeigen, dass $\hat{\sigma}$ natürlich ist. Es ist auch leicht zu sehen, dass $It(\mathfrak{M})$ eine $It(\mathfrak{C})$-Kategorie ist. (Beweis wie in 2), da $\hat{\beta}=\beta$ und $\hat{\sigma}=\sigma$) Jetzt konstruieren wir eine Abbildung von W_2 nach $It(\mathfrak{M})$, gegeben durch:

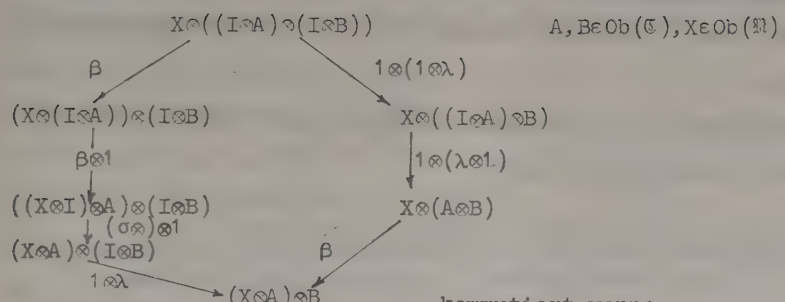
$\sim \longmapsto \langle 0, Id_{\mathfrak{M}}\rangle$, die vorherige Abbildung von W_1 nach $It(\mathfrak{C})$, gegeben durch: $- \longmapsto \langle 1, Id_{\mathfrak{C}}\rangle, e_o \longmapsto \langle 0,\tilde{I}\rangle$

Jetzt haben wir den Satz:

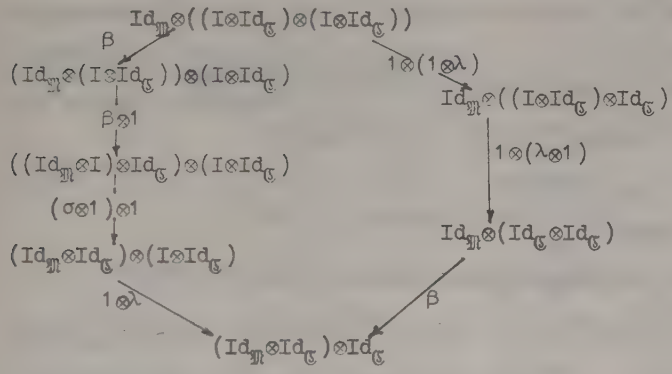
Satz:

Seien $\mathfrak{C}$ eine monoidale Kategorie und $\mathfrak{M}$ eine $\mathfrak{C}$-Kategorie. Seien P und Q Objekte von $\mathfrak{M}$, die als Tensorprodukte von einem Objekt $X \in \mathfrak{M}$, Objekte A_i aus $\mathfrak{C}$ $(i=1,\ldots,n)$ und weiteren Kopien von I dargestellt sind, genauer: Seien $P = u_{Id_{\mathfrak{M}}}(X,A_1,\ldots,A_n)$ und $Q = v_{Id_{\mathfrak{M}}}(X,A_1,\ldots,A_n)$ Bilder von zwei Worten $u,v \in W_2$ beim Einsetzen von $Id_{\mathfrak{M}}, Id_{\mathfrak{C}}, X$ und $A_1,\ldots,A_n$. Dann gibt es genau einen Morphismus $\varphi: P \longrightarrow Q$, der sich aus Morphismen zusammensetzt, die sich als Tensorprodukte von $\alpha,\lambda,\rho,\beta,\sigma,\bar{\alpha}^1,\bar{\lambda}^1,\bar{\rho}^1,\bar{\beta}^1,\bar{\sigma}^1$ und Identitäten darstellen lassen, genauer: so dass $\varphi: P \longrightarrow Q$ Bild eines Weges von u nach v beim Einsetzen von $Id_{\mathfrak{M}}, Id_{\mathfrak{C}}, X$ und $A_1,\ldots,A_n$ ist.

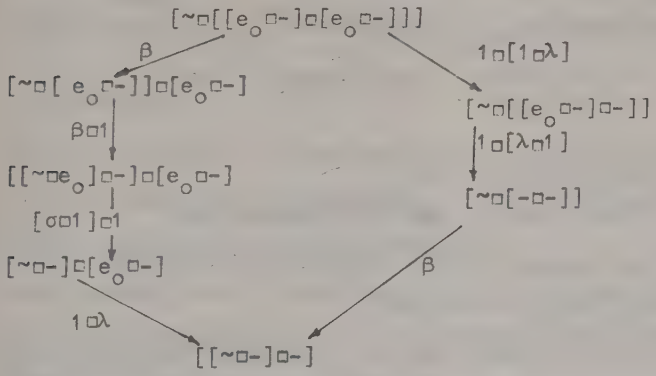
Beispiel:



kommutiert wenn:



kommutiert.Aber das letzte Diagramm kommutiert,da es das Bild von dem folgenden Diagramm,und It(𝔐) eine It(𝔄)-Kategorie ist:



6.4 Monoidale Funktoren:

Gegeben $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ monoidale Kategorien, $\mathfrak{F}:\mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$ monoidaler Funktor.

Wir konstruieren die Kategorie $It(\mathfrak{C})$ wie in 2) und 3), und die Kategorie $It(\mathfrak{C},\mathfrak{D})$ wie folgt:

Wir definieren die Objekte in $It(\mathfrak{C},\mathfrak{D})$ wie folgt:

$\langle c_1,d_1,\dots,c_t,d_t,S\rangle \varepsilon\ Ob(It(\mathfrak{C},\ ))$, $d_i \neq 0, i<t \wedge c_i \neq 0, i>1$ mit

$S:\mathfrak{C}^{c_1}\times^{d_1}\times\cdots\times\mathfrak{C}^{c_t}\times^{d_t} \longrightarrow$, $c_1,d_1,\dots,c_t,d_t \varepsilon N$ ein Funktor.

Wir definieren die Morphismen in $It(\mathfrak{C},\mathfrak{D})$ wie folgt:

$Mor(\langle c_1,d_1,\dots,c_t,d_t,S\rangle,\langle a_1,b_1,\dots,a_t,b_t,T\rangle)=$

$$\begin{cases} Mor_{f.}(S,T) & , c_i=a_i, d_i=b_i, i\varepsilon\{1,\dots,t\} \\ \phi & , \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir definieren das Tensorprodukt $\boxtimes$ in $It(\mathfrak{C},\mathfrak{D})$ wie folgt:

Seien: $S:\mathfrak{C}^{c_1}\times\mathfrak{D}^{d_1}\times\dots\times\mathfrak{C}^{c_t}\times\mathfrak{D}^{d_t} \longrightarrow \mathfrak{D}$, $c_1,d_1,\dots,c_t,d_t \varepsilon N$,

$T:\mathfrak{C}^{a_1}\times\mathfrak{D}^{b_1}\times\ \times\mathfrak{C}^{a_t}\times\mathfrak{D}^{b_t} \longrightarrow \mathfrak{D}$, $a_1,b_1,\dots,a_t,b_t \varepsilon N$

Funktoren.

$\langle c_1,d_1,\dots,c_t,d_t,S\rangle \boxtimes \langle a_1,b_1,\dots,a_{t'},b_{t'},T\rangle :=$

$\langle c_1+a_1,d_1+b_1,\dots,c_t+a_t,d_t+b_t,\dots,a_{t'},b_{t'},S\otimes T\rangle$, O.E.d.A. $t \leqslant t'$

Seien $f,g \varepsilon Mor(It(\mathfrak{C},\mathfrak{D}))$. $\boxtimes(f,g):=f\otimes g$

Es ist klar wie bei 2) und 3), dass $\boxtimes$ Bifunktor ist.

Wir definieren das ausgezeichnete Element in $It(\mathfrak{C},\mathfrak{D})$ als

$(0,\dots,0,\tilde{J})$, wobei $\tilde{J}:=(E\ni . \longrightarrow J\varepsilon\mathfrak{D})$.

Wir bestimmen die $\hat{\alpha},\hat{\lambda},\hat{\rho}$ genau wie in 2). Man wählt $\hat{\alpha}_{It(\mathfrak{C},\mathfrak{D})} = \alpha_{\mathfrak{D}}$, $\hat{\lambda}_{It(\mathfrak{C},\mathfrak{D})}=\lambda_{\mathfrak{D}}$, $\hat{\rho}_{It(\mathfrak{C},\mathfrak{D})}=\rho_{\mathfrak{D}}$. Es ist auch Routine zu zeigen, dass $\hat{\alpha},\hat{\lambda},\hat{\rho}$ natürlich sind. Dann folgt unmittelbar, dass $It(\mathfrak{C},\mathfrak{D})$ monoidal, da

monoidal ist.

Man betrachte im Speziellen $T:\mathfrak{C}^n \longrightarrow \mathfrak{C}, \mathfrak{F}:\mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$

monoidaler Funktor, dann definiert:

$It(\mathfrak{F}):It(\mathfrak{C}) \longrightarrow It(\mathfrak{C},\mathfrak{D})$, wobei

$It(\mathfrak{F})(\langle n,T\rangle) := \langle n,0,\mathfrak{F}T\rangle$,

$It(\mathfrak{F})(f) := \mathfrak{F}f$,wobei $f \in Mor(It(\mathfrak{C},\mathfrak{D}))$.

Jetzt ist es zu zeigen, dass $It(\mathfrak{F}):It(\mathfrak{C}) \longrightarrow It(\mathfrak{C},\mathfrak{D})$ Funktor ist.

Seien $T,T',T'':\mathfrak{C}^n \longrightarrow \mathfrak{C}$ Funktoren, $f:T \longrightarrow T'$, $g:T' \longrightarrow T''$ funktorielle Morphismen, $It(\mathfrak{F}):It(\mathfrak{C}) \longrightarrow It(\mathfrak{C},\mathfrak{D})$. Wir haben das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \langle n,T\rangle & \longmapsto & \langle n,0,\mathfrak{F}T\rangle \\ f\downarrow & & \mathfrak{F}f\downarrow \\ \langle n,T'\rangle & \longmapsto & \langle n,0,\mathfrak{F}T'\rangle \\ g\downarrow & & \mathfrak{F}g\downarrow \\ \langle n,T''\rangle & \longmapsto & \langle n,0,\mathfrak{F}T''\rangle \end{array}$$

$It(\mathfrak{F})(gof)$=(nach Definition) $\mathfrak{F}(gof)$=(da $\mathfrak{F}$ Funktor ist) $\mathfrak{F}g o \mathfrak{F}f$
=(nach Definition) $It(\mathfrak{F})(g) o It(\mathfrak{F})(f)$

Seien $C_1,\ldots,C_n \in Ob(\mathfrak{C})$.

$It(\mathfrak{F})(1_{\langle n,T\rangle})(C_1,\ldots,C_n) =$ (nach Definition) $\mathfrak{F}(1_{\langle n,T\rangle}(C_1,\ldots,C_n))$
=($\mathfrak{F}$ Funktor) $1_{\mathfrak{F}T(C_1,\ldots,C_n)} = 1_{\langle n,0,\mathfrak{F}T\rangle}(C_1,\ldots,C_n)$
$= 1_{It(\mathfrak{F})\langle n,T\rangle}(C_1,\ldots,C_n)$

Jetzt bleibt es zu zeigen, dass $It(\mathfrak{F})$ monoidal ist. Dafür müssen wir die natürliche Isomorphismen δ und ζ bestimmen. Seien:

$S:\mathfrak{C}^m \longrightarrow \mathfrak{C}$, $T:\mathfrak{C}^n \longrightarrow \mathfrak{C}$ Funktoren.

$\langle m+n,0,\mathfrak{F}(S\otimes T)\rangle = It(\mathfrak{F})(\langle m+n,S\otimes T\rangle) = It(\mathfrak{F})(\langle m,S\rangle \otimes \langle n,T\rangle) \overset{\delta}{\cong} It(\mathfrak{F})$

$It(\mathfrak{F})(\langle m,S\rangle) \otimes It(\mathfrak{F})(\langle n,T\rangle) = \langle m,0,\mathfrak{F}S\rangle \otimes \langle n,0,\mathfrak{F}T\rangle = \langle m+n,0,\mathfrak{F}S \otimes \mathfrak{F}T\rangle$

Jetzt seien $A_1,\ldots,A_{m+n} \in Ob(\mathfrak{C})$

$(S\otimes T)(A_1,\ldots,A_{m+n}) = (S(A_1,\ldots,A_m) \otimes T(A_{m+1},\ldots,A_{m+n}))$

$\overset{\delta_{It(\mathfrak{F})}}{\cong} \mathfrak{F}S(A_1,\ldots,A_m)\otimes\mathfrak{F}T(A_{m+1},\ldots,A_{m+n}) = (\mathfrak{F}S\otimes\mathfrak{F}T)(A_1,\ldots,A_{m+n})$.

Wir wählen $\delta_{It(\mathfrak{F})} = \delta_{\mathfrak{F}}$.

Jetzt bestimmen wir $\zeta_{It(\mathfrak{F})}$.

$It(\mathfrak{F})(\langle 0,\tilde{I}\rangle) = \langle 0,0,\mathfrak{F}\tilde{I}\rangle \overset{\zeta_{It(\mathfrak{F})}}{\cong} \langle 0,0,\tilde{J}\rangle$

$(\mathfrak{F}\tilde{I})(.) = \mathfrak{F}(I) \overset{\zeta_{It(\mathfrak{F})}}{\cong} J = \tilde{J}(.)$

Wir wählen $\zeta_{It(\mathfrak{F})} = \zeta_{\mathfrak{F}}$.

Es ist klar, dass $\delta_{It(\mathfrak{F})}$ und $\zeta_{It(\mathfrak{F})}$ natürliche Isomorphismen sind.

Es ist leicht zu zeigen, dass die drei Diagramme gegeben in [12] kommutieren, d.h. $It(\mathfrak{F})$ monoidal ist.

Wir konstruieren jetzt die folgende Abbildung von W_1 nach $It(\mathfrak{C})$ und von W_2 nach $It(\mathfrak{C},\mathfrak{D})$, die gegeben sind durch:

$e_o \longmapsto \langle 0,\tilde{I}\rangle$, $- \longmapsto \langle 1,Id_{\mathfrak{C}}\rangle$, $e_1 \longmapsto \langle 0,0,\tilde{J}\rangle$, $\sim \longmapsto \langle 0,1,Id_{\mathfrak{D}}\rangle$,

$f \longmapsto It(\mathfrak{F})$.

Die letzte Aussage ist grob; eine genaue Aussage kann man formulieren wie in 2.16.

Jetzt haben wir den Satz:

Satz:

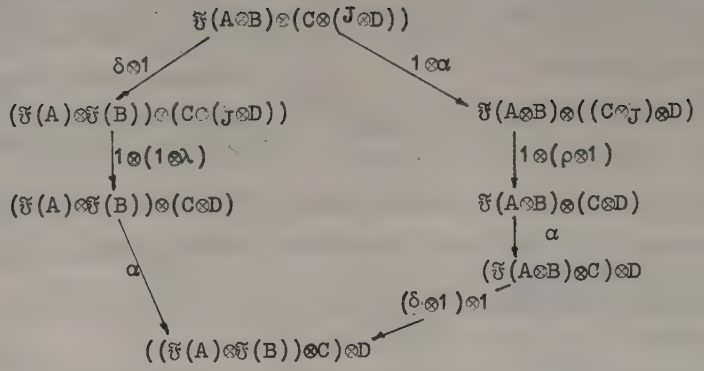
Seien $(\mathbb{C},\otimes,I),(\mathcal{D},\otimes,J)$ zwei monoidale Kategorien, und $\mathfrak{F}:\mathbb{C}\longrightarrow\mathcal{D}$ ein monoidaler Funktor.

Seien P und Q Objekte von $\mathcal{D}$, die sich mit Objekten A_i aus $\mathbb{C}$, $(i=1,\ldots,n)$, Objekten B_j aus $\mathcal{D}$, $(j=1,\ldots,m)$, und Kopien von I und J durch Anwendung von Tensorprodukten bzgl. $\mathbb{C}$ oder $\mathcal{D}$ und durch Anwendungen des Funktors $\mathfrak{F}$ darstellen lassen, wobei in beiden Objekten die Reihenfolge der A_i und B_j dieselbe sei.

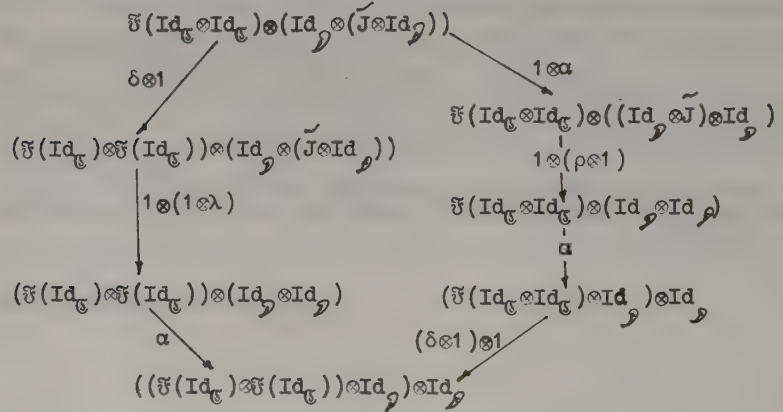
Genauer: Seien $P = u_{Id_{\mathcal{D}}}(A_1,\ldots,A_n,B_1,\ldots,B_m)$,

$Q = v_{Id_{\mathcal{D}}}(A_1,\ldots,A_n,B_1,\ldots,B_m)$ Bilder von zwei Worten u und v aus W_2 beim Einsetzen von $Id_{\mathcal{D}},Id_{\mathbb{C}},A_1,\ldots,A_n,B_1,\ldots,B_m$, die ein gemeinsames Standardwort haben, dann gibt es genau einen Morphismus $\varphi:P\longrightarrow Q$, der sich aus Morphismen zusammensetzt, die sich als Tensorprodukte von $\alpha\ \lambda,\rho,\delta,\zeta,\bar{\alpha}^1,\bar{\lambda}^1,\bar{\rho}^1,\bar{\delta}^1,\bar{\zeta}^1$, und Identitäten darstellen lassen, genauer: so dass $\varphi:P\longrightarrow Q$ Bild eines Weges von u nach v beim Einsetzen von $Id_{\mathcal{D}},Id_{\mathbb{C}},A_1,\ldots,A_n,B_1,\ldots,B_m$ ist.

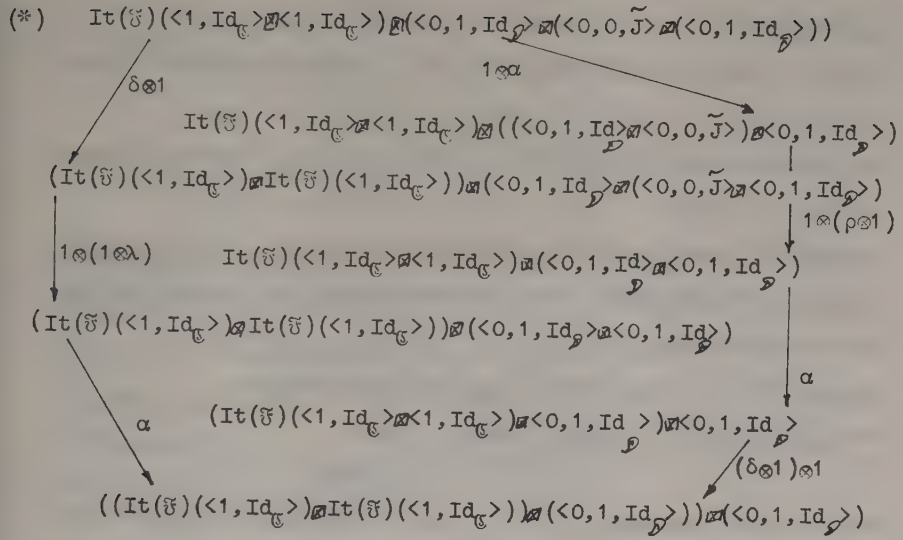
Beispiel:



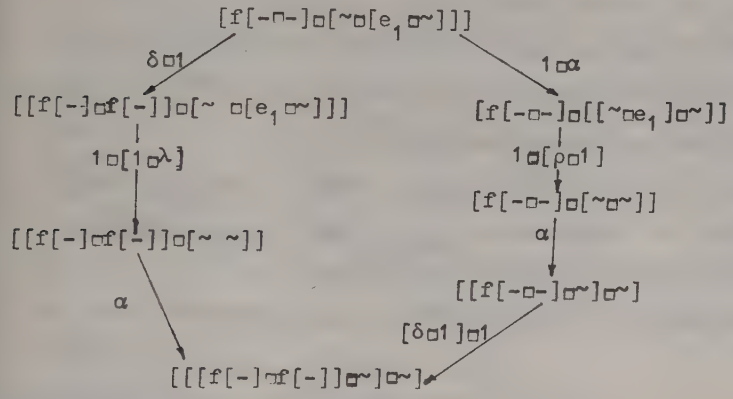
kommutiert, wenn das folgende Diagramm kommutiert:



d.h. wenn das folgende Diagramm kommutiert:



Aber das letzte Diagramm ist das Bild von:



und da It($\mathfrak{F}$) monoidaler Funktor ist, kommutiert Diagramm (*), also kommutiert das ursprüngliche Diagramm.

6.5 .$\mathfrak{C}$-Funktoren

Seien $\mathfrak{C}$ eine monoidale Kategorie, $\mathfrak{M},\mathfrak{N}$ $\mathfrak{C}$-Kategorien, $\mathfrak{F}:\mathfrak{N}\longrightarrow\mathfrak{N}$ ein $\mathfrak{C}$-Funktor.

Wir konstruieren die Kategorie $It(\mathfrak{M})$ wie in 3), und die Kategorie $It(\mathfrak{M},\mathfrak{N})$ wie folgt:

Sei $\mathfrak{G}:\mathfrak{M}\times\mathfrak{C}^n\longrightarrow\mathfrak{N}$, $n\in N$ ein Funktor. Die Objekte der Kategorie $It(\mathfrak{M},\mathfrak{N})$ sind die Paare $\langle n,\mathfrak{G}\rangle$. Die Morphismen der Kategorie $It(\mathfrak{M},\mathfrak{N})$ sind so definiert:

Seien $\mathfrak{G}:\mathfrak{M}\times\mathfrak{C}^n\longrightarrow\mathfrak{N}$, $\mathfrak{H}:\mathfrak{M}\times\mathfrak{C}^l\longrightarrow\mathfrak{N}$, $n,l\in N$ Funktoren.

$$Mor_{f.}(\langle n,\mathfrak{G}\rangle,\langle l,\mathfrak{H}\rangle)=\begin{cases}Mor_{f.}(\mathfrak{G},\mathfrak{H}) & ,n=l\\ \phi & ,\text{sonst.}\end{cases}$$

Das ist eine Kategorie und mit geeigneten Tensorprodukt $\boxtimes$, natürlichen Isomorphismen β und σ eine $It(\mathfrak{C})$-Kategorie.

Wir definieren das Tensorprodukt:

Seien $\mathfrak{G}$ wie oben gegeben, $\mathfrak{T}:\mathfrak{C}^m\longrightarrow\mathfrak{C}$ ein Funktor.

$\langle n,\mathfrak{G}\rangle\boxtimes\langle m,\mathfrak{T}\rangle := \langle n+m,\mathfrak{G}\otimes\mathfrak{T}\rangle$, wobei $\mathfrak{G}\otimes\mathfrak{T}$ wie in 3) definiert ist.

Seien $f\in Mor(It(\mathfrak{M},\mathfrak{N}))$, $g\in Mor(It(\mathfrak{C}))$: $\boxtimes(f,g):=f\otimes g$.

$\boxtimes$ ist ein Bifunktor. (Beweis analog zu 3))

Ganz analog zu 3) wählen wir $\beta_{It(\mathfrak{M},\mathfrak{N})}=\beta_{\mathfrak{N}}$, und $\sigma_{It(\mathfrak{M},\mathfrak{N})}=\sigma_{\mathfrak{N}}$.

Es ist Routine zu zeigen, dass $\beta_{It(\mathfrak{M},\mathfrak{N})}$ und $\sigma_{It(\mathfrak{M},\mathfrak{N})}$ natürlich sind, und $It(\mathfrak{M},\mathfrak{N})$ eine $It(\mathfrak{C})$-Kategorie ist.

Jetzt definieren wir $It(\mathfrak{F}):It(\mathfrak{M})\longrightarrow It(\mathfrak{M},\mathfrak{N})$

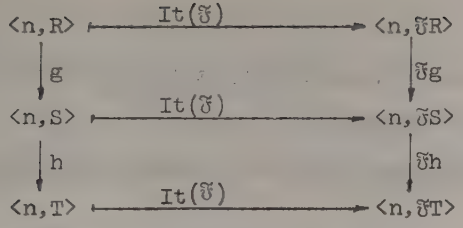
$$\langle n,S\rangle\longmapsto\langle n,\mathfrak{F}S\rangle$$

$$f\longmapsto\mathfrak{F}f\quad(f\in Mor(It(\mathfrak{M})))$$

Wir zeigen jetzt, dass $It(\mathfrak{F})$ ein $It(\mathfrak{C})$-Funktor ist. (*)

Seien $R:\mathfrak{M}\times\mathfrak{C}^n\longrightarrow\mathfrak{M}$, $S:\mathfrak{M}\times\mathfrak{C}^n\longrightarrow\mathfrak{M}$, $T:\mathfrak{M}\times\mathfrak{C}^n\longrightarrow\mathfrak{M}$ Funktoren, $g:R\longrightarrow S$, $h:S\longrightarrow T$ funktorielle Morphismen.

(*) Wir meinen mit geeignetem $\boxtimes$



It(𝔉)(hg)=(nach Definition) 𝔉 (hg) =(𝔉 Funktor)𝔉h∘𝔉g = (nach Definition) It(𝔉)(h)∘It(𝔉)(g)

Seien R wie oben gegeben, $A_1,\ldots,A_n \in Ob(\mathfrak{C})$, $X \in Ob(\mathfrak{M})$:

$(It(\mathfrak{F})(1_{\langle n,R\rangle}))(X,A_1,\ldots,A_n)$ =(nach Definition) $\mathfrak{F}(1_{\langle n,R\rangle})(X,A_1,\ldots,A_n)$ =(𝔉 Funktor) $1_{\mathfrak{F}R(X,A_1,\ldots,A_n)} = 1_{\langle n,\mathfrak{F}R\rangle}(X,A_1,\ldots,A_n)$ =(nach Definition) $1_{It(\mathfrak{F})(\langle n,R\rangle)}(X,A_1,\ldots,A_n)$

Jetzt definieren wir ξ:

Seien $S:\mathfrak{M}\times\mathfrak{C}^m \longrightarrow \mathfrak{M}$, $T:\mathfrak{M}\times\mathfrak{C}^n \longrightarrow \mathfrak{M}$, m,n∈N, Funktoren, $X \in Ob(\mathfrak{M})$, $A_1,\ldots,A_{m+n} \in Ob(\mathfrak{C})$

Jetzt: $\langle m+n,\mathfrak{F}(S\otimes T)\rangle = It(\mathfrak{F})(\langle m+n,S\otimes T\rangle) = It(\mathfrak{F})(\langle m,S\rangle \otimes \langle n,T\rangle) \overset{\xi}{=} It(\mathfrak{F})$

$It(\mathfrak{F})(\langle m,S\rangle)\otimes\langle n,T\rangle = \langle m,\mathfrak{F}S\rangle\otimes\langle n,T\rangle = \langle m+n,\mathfrak{F}S\otimes T\rangle$,d.h.

$\mathfrak{F}(S\otimes T)(X,A_1,\ldots,A_{m+n}) = \mathfrak{F}(S(X,A_1,\ldots,A_m)\otimes T(A_{m+1},\ldots,A_{m+n})) \overset{\xi}{=} It(\mathfrak{F})$

$\mathfrak{F}(S(X,A_1,\ldots,A_m))\otimes T(A_{m+1},\ldots,A_{m+n}) = (\mathfrak{F}S\otimes T)(X,A_1,\ldots,A_{m+n})$.

Wir wählen $\xi_{It(\mathfrak{F})} = \xi_{\mathfrak{F}}$.

Es ist klar, dass $\xi_{It(\mathfrak{F})}$ natürlich ist, und leicht zu zeigen, dass die zwei Diagramme in [12] kommutieren, d.h. It(𝔉) ein It(𝔈)-Funktor ist.

Wir sind jetzt in der Situation 3.16, mit:

Statt 𝔈 haben wir It(𝔈) ,statt 𝔐 haben wir It(𝔐),

statt 𝔑 haben wir It(𝔐,𝔑) ,statt 𝔉 haben wir It(𝔉),

statt I haben wir $\langle 0,\widetilde{I}\rangle$,statt X haben wir $\langle 0,Id_{\mathfrak{M}}\rangle$,

statt B haben wir $\langle 1,Id_{\mathfrak{C}}\rangle$,statt Y haben wir $\langle 0,Id_{\mathfrak{N}}\rangle$,

also haben wir den Satz:

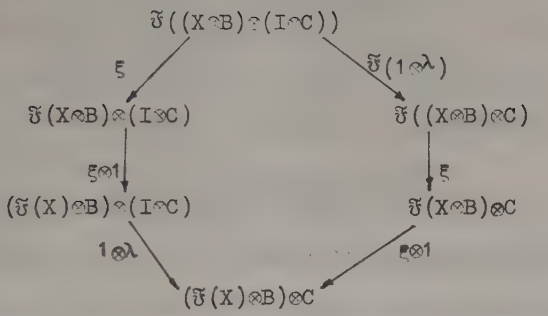
Satz:

Seien $\mathbb{C}$ eine monoidale Kategorie, $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ zwei $\mathbb{C}$-Kategorien, $\mathfrak{F}:\mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{N}$ ein $\mathbb{C}$-Funktor.

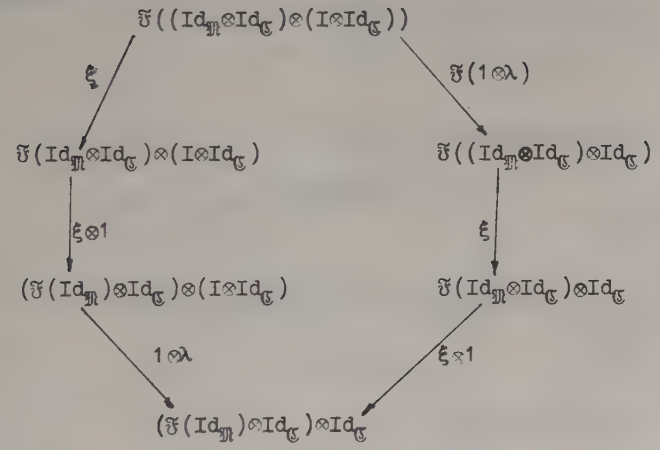
Seien P und Q Objekte aus $\mathfrak{M}$, die auf folgende Weise konstruiert sind:

Zur Konstruktion beider Objekte wähle man $B_1,\dots,B_n \in Ob(\mathbb{C})$, tensoriere $X \in Ob(\mathfrak{M})$ mit $B_1,\dots,B_i$ $(i \leq n)$ und eventuell Kopien von $I \in Ob(\mathbb{C})$, wende darauf den Funktor $\mathfrak{F}$ an und tensoriere das Ergebnis mit $B_{i+1},\dots,B_n$ und eventuell weiteren Kopien von I. Alternativ: Man tensoriere $Y \in Ob(\mathfrak{N})$ mit $B_1,\dots,B_n$ und eventuell Kopien von I, d.h. genauer: Seien $P=u_{Id_{\mathfrak{M}}}(X,B_1,\dots,B_n)$ (bzw. $P=u_{Id_{\mathfrak{N}}}(Y,B_1,\dots,B_n)$) und $Q=v_{Id_{\mathfrak{M}}}(X,B_1,\dots,B_n)$ (bzw. $Q=v_{Id_{\mathfrak{N}}}(Y,B_1,\dots,B_n)$) Bilder von zwei Worten $u,v \in W_{\mathfrak{F}}$, beim Einsetzen von $Id_{\mathfrak{M}}, Id_{\mathbb{C}}, X, B_1,\dots,B_n$ (bzw. $Id_{\mathfrak{N}}, Id_{\mathbb{C}}, B_1,\dots,B_n, Y$), mit $\dashv(u)=\dashv(v)=n$. Dann gibt es genau einen Morphismus $\varphi:P \longrightarrow Q$ der sich aus Morphismen zusammensetzt, die sich als Tensorprodukte von $\alpha,\lambda,\rho,\beta,\sigma,\bar{\alpha}^1,\bar{\lambda}^1,\bar{\rho}^1,\bar{\beta}^1,\bar{\sigma}^1,\xi,\bar{\xi}^1$ und Identitäten darstellen lassen, genauer: so dass $\varphi:P \longrightarrow Q$ Bild eines Weges von u nach v, beim Einsetzen von $Id_{\mathfrak{M}}, Id_{\mathbb{C}}, X$ und $B_1,\dots,B_n$ (bzw. $Id_{\mathfrak{N}}, Id_{\mathbb{C}}, Y, B_1,\dots,B_n$) ist.

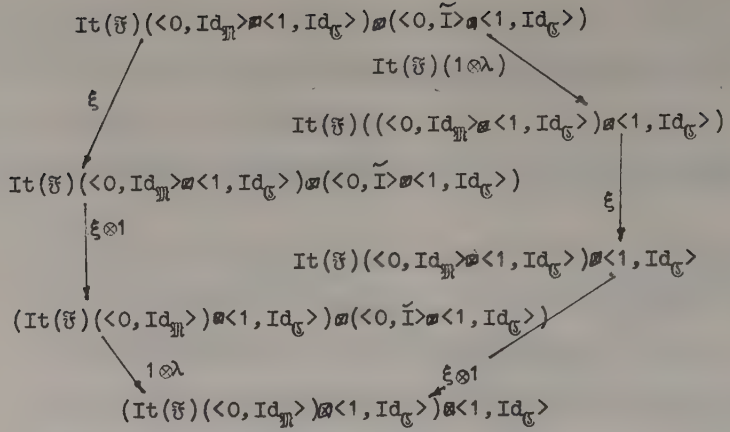
Beispiel:



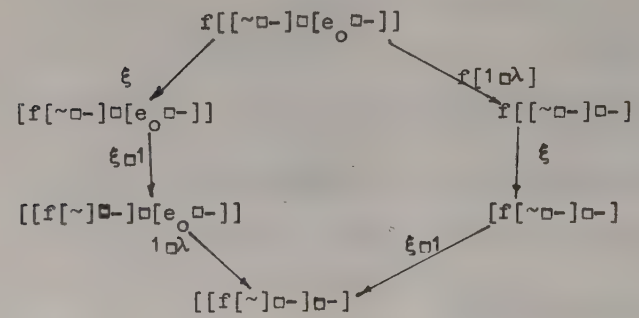
kommutiert,wenn das folgende Diagramm kommutiert:



d.h. wenn das folgende Diagramm kommutiert:



Das letzte Diagramm kommutiert,da es das Bild von dem folgenden Diagramm,und It(𝔉) ein It(𝔈)-Funktor ist:



6.6 Natürliche Transformation zwischen monoidalen Funktoren

Gegeben $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ monoidale Kategorien, $\mathfrak{F}:\mathfrak{C}\longrightarrow\mathfrak{D}, \mathfrak{G}:\mathfrak{C}\longrightarrow\mathfrak{D}$ monoidale Funktoren, $\chi:\mathfrak{F}\longrightarrow\mathfrak{G}$ monoidale Transformation.

Wir bilden wie in 4) $It(\mathfrak{F}):It(\mathfrak{C})\longrightarrow It(\mathfrak{C},\mathfrak{D})$, $It(\mathfrak{G}):It(\mathfrak{C})\longrightarrow It(\mathfrak{C},\mathfrak{D})$. Jetzt bilden wir $It(\chi):It(\mathfrak{F})\longrightarrow It(\mathfrak{G})$, gegeben durch:

$It(\chi)(\langle m,S\rangle) := \chi S$, wobei $S:\mathfrak{C}^m\longrightarrow\mathfrak{C}$ Funktor ist.

Wir zeigen, dass $It(\chi)$ natürliche Transformation ist.

Seien $S:\mathfrak{C}^m\longrightarrow\mathfrak{C}, T:\mathfrak{C}^m\longrightarrow\mathfrak{C}$, $m\in N$ Funktoren, $f:S\longrightarrow T$ funktorieller Morphismus.

$$\begin{array}{ccc} It(\mathfrak{F})(\langle m,S\rangle) & \xrightarrow{It(\chi)(\langle m,S\rangle)} & It(\mathfrak{G})(\langle m,S\rangle) \\ \downarrow{\scriptstyle It(\mathfrak{F})(f)} & & \downarrow{\scriptstyle It(\mathfrak{G})(f)} \\ It(\mathfrak{F})(\langle m,T\rangle) & \xrightarrow{It(\chi)(\langle m,T\rangle)} & It(\mathfrak{G})(\langle m,T\rangle) \end{array} \quad \text{kommutiert} \Leftrightarrow$$

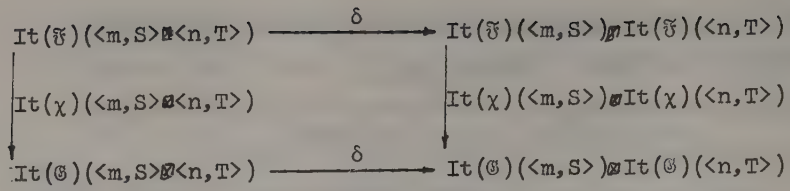
$$\begin{array}{ccc} \langle m,\mathfrak{F}S\rangle & \xrightarrow{It(\chi)(\langle m,S\rangle)} & \langle m,\mathfrak{G}S\rangle \\ \downarrow{\scriptstyle \mathfrak{F}f} & & \downarrow{\scriptstyle \mathfrak{G}f} \\ \langle m,\mathfrak{F}T\rangle & \xrightarrow{It(\chi)(\langle m,T\rangle)} & \langle m,\mathfrak{G}T\rangle \end{array} \quad \text{kommutiert} \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{F}S & \xrightarrow{\chi S} & \mathfrak{G}S \\ \downarrow{\scriptstyle \mathfrak{F}f} & & \downarrow{\scriptstyle \mathfrak{G}f} \\ \mathfrak{F}T & \xrightarrow{\chi T} & \mathfrak{G}T \end{array} \quad \text{kommutiert.}$$

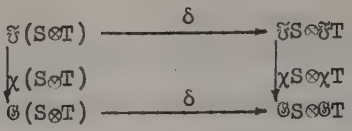
Das letzte Diagramm kommutiert, da χ natürliche Transformation ist.

Wir zeigen jetzt, dass die zwei Diagramme, die in [11] gegeben sind, kommutieren, d.h. $It(\chi)$ monoidale Transformation ist.

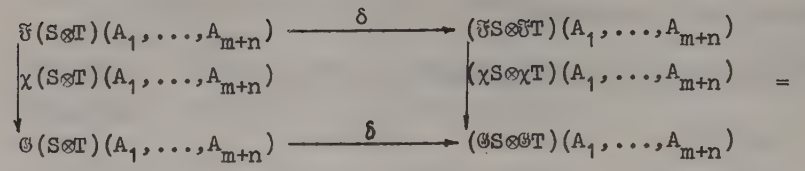
Seien $S:\mathfrak{C}^m\longrightarrow\mathfrak{C}, T:\mathfrak{C}^n\longrightarrow\mathfrak{C}$, $m,n\in N$ Funktoren und $A_1,\ldots,A_{m+n}\in Ob(\mathfrak{C})$.

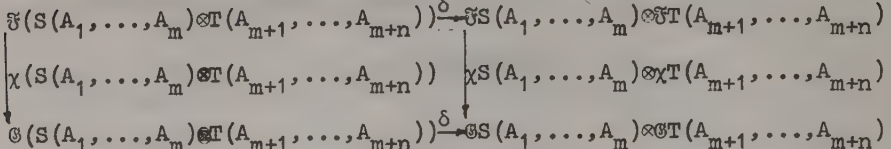


kommutiert ⇔



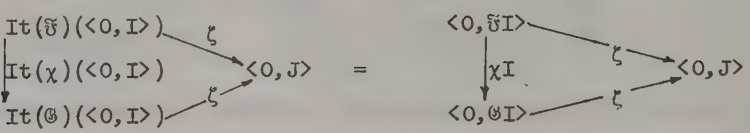
kommutiert ⇔



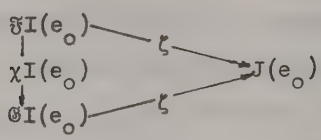


kommutiert. Das letzte Diagramm kommutiert, da χ monoidale Transformation ist.

Seien I und J wie in 4) definiert.

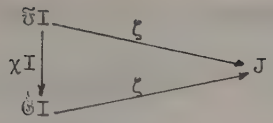


kommutiert ⇔



kommutiert.

Das letzte Diagramm ist genau das nächste:



Dieses Diagramm kommutiert, da χ monoidal ist.

Also ist $It(\chi)$ monoidal.

Wir sind jetzt in der Situation 4.16:

Statt $\mathfrak{C}$ haben wir $It(\mathfrak{C})$, statt $\mathfrak{D}$ haben wir $It(\mathfrak{C},\mathfrak{D})$,

statt I haben wir $\langle 0,\tilde{I}\rangle$, statt A haben wir $\langle 1, Id_{\mathfrak{C}}\rangle$,

statt J haben wir $\langle Q\rho, \tilde{J}\rangle$, statt B haben wir $\langle Q1, Id_{\mathfrak{D}}\rangle$,

statt $\mathfrak{F}$ haben wir $It(\mathfrak{F})$, statt $\mathfrak{G}$ haben wir $It(\mathfrak{G})$,

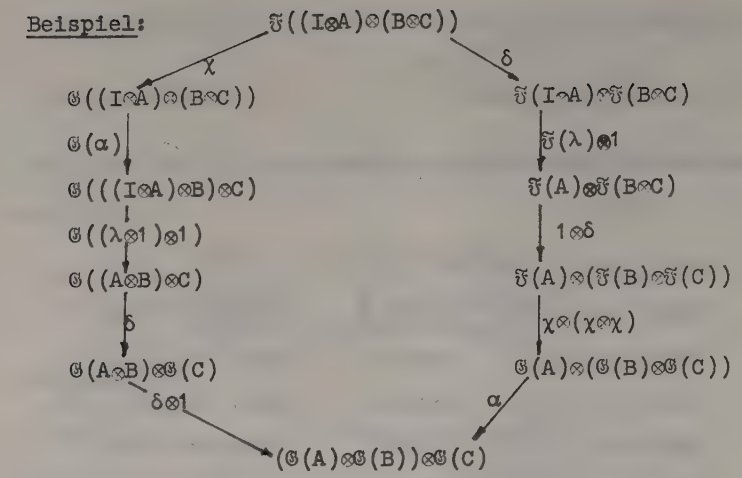
statt χ haben wir $It(\chi)$.

Also haben wir den Satz:

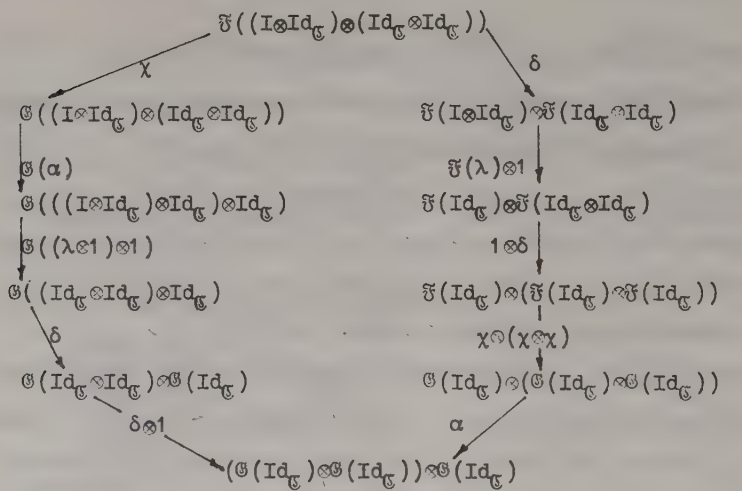
Satz:

Gegeben $(\mathfrak{C},\otimes,I)$, $(\mathfrak{D},\otimes,J)$ monoidale Kategorien, $\mathfrak{F}:\mathfrak{C}\longrightarrow\mathfrak{D}$, $\mathfrak{G}:\mathfrak{C}\longrightarrow\mathfrak{D}$ monoidale Funktoren, $\chi:\mathfrak{F}\longrightarrow\mathfrak{G}$ monoidale Transformation. Sei P ein Objekt aus $\mathfrak{D}$, das sich mit Objekten A_i $(i=1,\ldots,n)$ aus $\mathfrak{C}$, Objekten B_j $(j=1,\ldots,m)$ aus $\mathfrak{D}$, und Kopien von I und J durch Anwendung von Tensorprodukten bzgl. $\mathfrak{C}$ oder $\mathfrak{D}$, und durch Anwendungen der Funktoren $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ bilden lässt, sei Q ein Objekt aus $\mathfrak{D}$, das sich als Tensorprodukt von den Objekten $\mathfrak{G}(A_i)$ $(i=1,\ldots,n)$ und den Objekten B_j $(j=1,\ldots,m)$ schreiben lässt, wobei die Reihenfolge von A_i und B_j in der Objekten P und Q dieselbe sei und die Klammern im Objekt Q so weit wie möglich nach links gezogen seien. Genauer: Seien $P = u_{Id_{\mathfrak{D}}}(A_1,\ldots,A_n,B_1,\ldots,B_m)$ und $Q = v_{Id_{\mathfrak{D}}}(A_1,\ldots,A_n,B_1,\ldots,B_m)$ Bilder von zwei Worten $u,v\in W_2$ beim Einsetzen von $Id_{\mathfrak{C}}, Id_{\mathfrak{D}}, A_1,\ldots,A_n, B_1,\ldots,B_m$, und sei v das Standardwort zu u. Dann gibt es genau einen Morphismus $\varphi:P\longrightarrow Q$, der sich aus Morphismen zusammensetzt, die sich als Tensorprodukte von $\alpha,\lambda,\rho,\delta,\zeta,\chi,$ $\bar{\alpha}^1,\bar{\lambda}^1,\bar{\rho}^1,\bar{\delta}^1,\bar{\zeta}^1$, und Identitäten darstellen lassen, genauer: so dass $\varphi:P\longrightarrow Q$ Bild eines Weges von u nach v beim Einsetzen von $Id_{\mathfrak{C}}, Id_{\mathfrak{D}}$ $A_1,\ldots,A_n,B_1,\ldots,B_m$ ist.

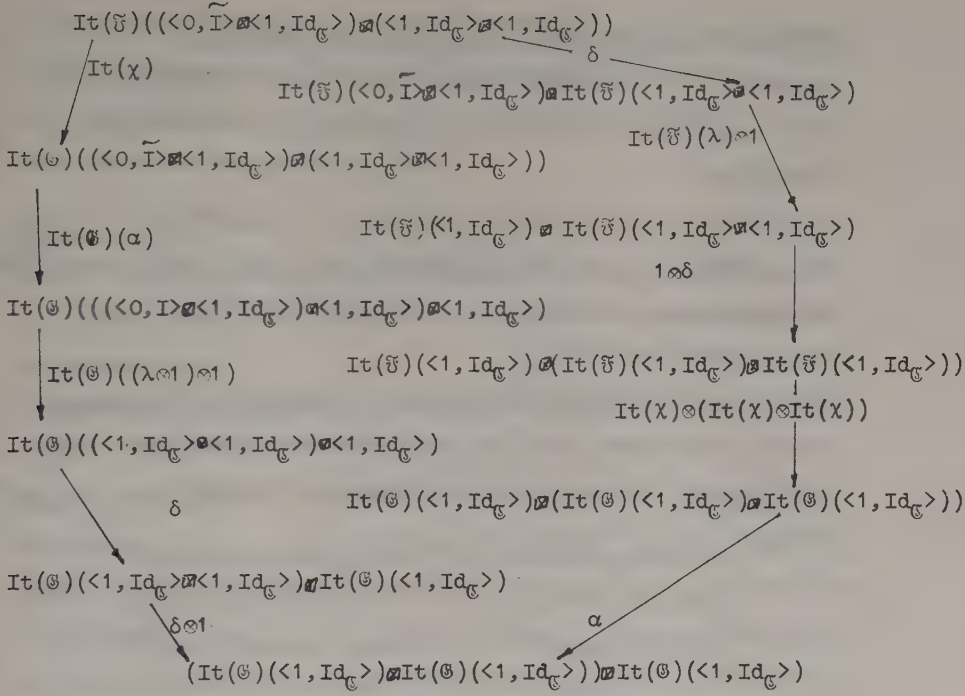
Beispiel:



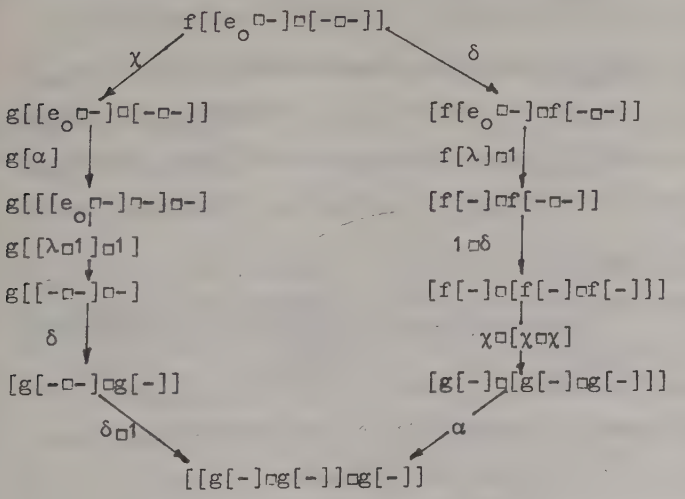
kommutiert wenn das nächste kommutiert:



Das letzte Diagramm ist genau das nächste:



Das letzte Diagramm kommutiert, da es das Bild vom nächsten Diagramm, und It(χ) monoidale Transformation ist.



6.7 Natürliche Transformationen zwischen $\mathfrak{C}$-Funktoren

Gegeben $\mathfrak{C}$ eine monoidale Kategorie, $\mathfrak{M},\mathfrak{N}$ zwei $\mathfrak{C}$-Kategorien, $\mathfrak{F}:\mathfrak{M}\longrightarrow\mathfrak{N}$, $\mathfrak{G}:\mathfrak{M}\longrightarrow\mathfrak{N}$ zwei $\mathfrak{C}$-Funktoren, $\Psi:\mathfrak{F}\longrightarrow\mathfrak{G}$ ein $\mathfrak{C}$-Morphism.

Wir bilden wie in 5) $It(\mathfrak{F}):It(\mathfrak{M})\longrightarrow It(\mathfrak{M},\mathfrak{N})$ und $It(\mathfrak{G}):It(\mathfrak{M})\longrightarrow It(\mathfrak{M},\mathfrak{N})$, und wie in 6) $It(\Psi):It(\mathfrak{F})\longrightarrow It(\mathfrak{G})$, gegeben durch: $It(\Psi)(\langle m,S\rangle) := \Psi S$, wobei $S:\mathfrak{M}\times\mathfrak{C}^m\longrightarrow\mathfrak{N}$, $m\in N$ ein Funktor ist.

Genau wie in 6) zeigt man, dass $It(\Psi)$ natürliche Transformation ist. Zu zeigen dass $It(\Psi)$ ein $It(\mathfrak{C})$-Morphism, betrachten wir $S:\mathfrak{M}\times\mathfrak{C}^m\longrightarrow\mathfrak{N}$, $T:\mathfrak{C}^n\longrightarrow\mathfrak{C}$, $m,n\in N$, Funktoren, $X\in Ob(\mathfrak{M})$, $A_1,\ldots,A_{m+n}\in Ob(\mathfrak{C})$

$$\begin{array}{ccc} It(\mathfrak{F})(\langle m,S\rangle\otimes\langle n,T\rangle) & \xrightarrow{\xi} & It(\mathfrak{F})(\langle m,S\rangle)\otimes\langle n,T\rangle \\ \downarrow It(\Psi)(\langle m,S\rangle\otimes\langle n,T\rangle) & & \downarrow It(\Psi)(\langle m,S\rangle)\otimes\langle n,T\rangle \\ It(\mathfrak{G})(\langle m,S\rangle\otimes\langle n,T\rangle) & \xrightarrow{\xi} & It(\mathfrak{G})(\langle m,S\rangle)\otimes\langle n,T\rangle \end{array} \quad =$$

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{F}(S\otimes T) & \xrightarrow{\xi} & \mathfrak{F}S\otimes T \\ \downarrow \Psi(S\otimes T) & & \downarrow \Psi S\otimes T \\ \mathfrak{G}(S\otimes T) & \xrightarrow{\xi} & \mathfrak{G}S\otimes T \end{array} \quad \text{kommutiert} \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{F}(S\otimes T)(X,A_1,\ldots,A_{m+n}) & \xrightarrow{\xi} & (\mathfrak{F}S\otimes T)(X,A_1,\ldots,A_{m+n}) \\ \downarrow \Psi(S\otimes T)(X,A_1,\ldots,A_{m+n}) & & \downarrow (\Psi S\otimes T)(X,A_1,\ldots,A_{m+n}) \\ \mathfrak{G}(S\otimes T)(X,A_1,\ldots,A_{m+n}) & \xrightarrow{\xi} & (\mathfrak{G}S\otimes T)(X,A_1,\ldots,A_{m+n}) \end{array}$$

kommutiert. Das letzte Diagramm ist dasselbe folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{F}(S(X,A_1,\ldots,A_m)\otimes T(A_{m+1},\ldots,A_{m+n}) & \longrightarrow & \mathfrak{F}S(X,A_1,\ldots,A_m)\otimes T(A_{m+1},\ldots, \\ \downarrow \Psi(S(X,A_1,\ldots,A_m)\otimes T(A_{m+1},\ldots,A_{m+n}) & & \downarrow \Psi S(X,A_1,\ldots,A_m)\otimes T(A_{m+1},\ldots, \\ \mathfrak{G}(S(X,A_1,\ldots,A_m)\otimes T(A_{m+1},\ldots,A_{m+n}) & \longrightarrow & \mathfrak{G}S(X,A_1,\ldots,A_m)\otimes T(A_{m+1},\ldots, \end{array}$$

Das letzte Diagramm kommutiert, da Ψ ein $\mathfrak{C}$-Morphism ist.

Wir sind jetzt in der Situation 5.16, mit:

Statt $\mathfrak{C}$ haben wir $It(\mathfrak{C})$, Statt $\mathfrak{M}$ haben wir $It(\mathfrak{M})$

statt $\mathfrak{N}$ haben wir $It(\mathfrak{M},\mathfrak{N})$, statt $\mathfrak{F}$ haben wir $It(\mathfrak{F})$

statt $\mathfrak{G}$ haben wir $It(\mathfrak{G})$, statt $\mathfrak{V}$ haben wir $It(\mathfrak{V})$,

statt I haben wir $\langle 0, \widetilde{I} \rangle$, statt X haben wir $\langle 0, Id_{\mathfrak{M}} \rangle$,

statt B haben wir $\langle 1, Id_{\mathfrak{C}} \rangle$, statt Y haben wir $\langle 0, Id_{\mathfrak{N}} \rangle$,

also haben wir den Satz:

Satz:

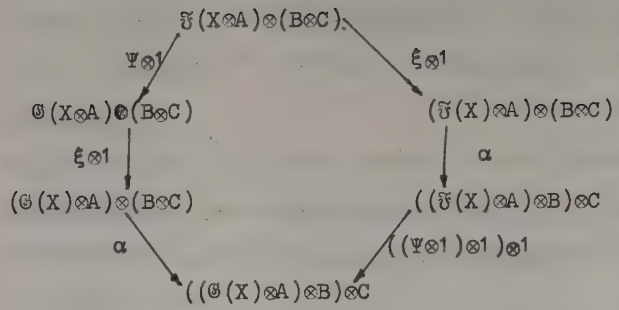
Seien $(\mathfrak{C}, \otimes, I)$ eine monoidale Kategorie, $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ zwei $\mathfrak{C}$-Kategorien, $\mathfrak{F}: \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{N}$, $\mathfrak{G}: \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{N}$ zwei $\mathfrak{C}$-Funktoren, $\Psi: \mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{G}$ eine $\mathfrak{C}$-Transformation.

Seien P und Q Objekte aus $\mathfrak{N}$, die auf folgende Weise konstruiert sind:

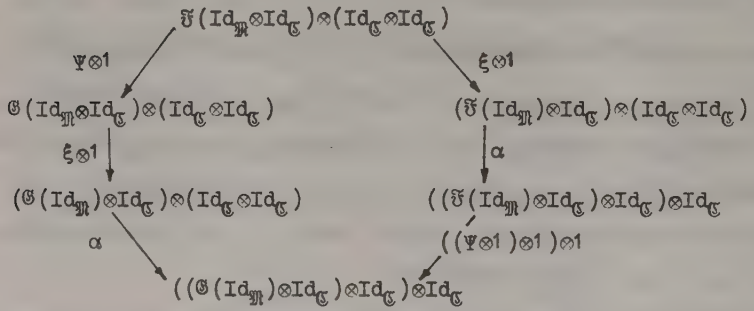
Zur Konstruktion von P: Man wähle $B_1, \ldots, B_n \varepsilon Ob(\mathfrak{C})$, tensoriere $X \varepsilon Ob(\mathfrak{N})$ mit $B_1, \ldots, B_i$ $(i < n)$ und eventuell Kopien $I \varepsilon Ob(\mathfrak{C})$, wende darauf den Funktor $\mathfrak{F}$ oder den Funktor $\mathfrak{G}$ an, und tensoriere das Ergebnis mit $B_{i+1}, \ldots, B_n$ und eventuell weiteren Kopien von I. Alternativ: Man tensoriere $Y \varepsilon Ob(\mathfrak{N})$ mit $B_1, \ldots, B_n$ und eventuell Kopien von I $(B_1, \ldots, B_n, I \varepsilon Ob(\mathfrak{C}))$.

Zur Konstruktion von Q: Q sei das Tensorprodukt von $\mathfrak{G}(X)$ bzw. Y (je nachdem P mit X oder Y konstruiert ist) mit den Objekten $B_1, \ldots, B_n$, wobei die Klammern nach links gezogen seien. Genauer: Seien $P = u_{Id_{\mathfrak{N}}}(X, B_1, \ldots, B_n)$ bzw. $u_{Id_{\mathfrak{N}}}(Y, B_1, \ldots, B_n)$ und $Q = v_{Id_{\mathfrak{M}}}(X, B_1, \ldots, B_n)$ bzw. $v_{Id_{\mathfrak{N}}}(Y, B_1, \ldots, B_n)$ Bilder von zwei Worten $u, v \varepsilon W_{\Sigma}$ beim Einsetzen von $Id_{\mathfrak{M}}, Id_{\mathfrak{C}}, X$ und $B_1, \ldots, B_n$ bzw. $Id_{\mathfrak{N}}, Id_{\mathfrak{C}}$, Y und $B_1, \ldots, B_n$ und sei v das Standardwort zu u. Dann gibt es genau einen Morphismus $\varphi: P \longrightarrow Q$, der sich aus Morphismen zusammensetzt, die sich als Tensorprodukte von $\alpha, \lambda, \rho, \beta, \sigma, \xi, \Psi, \alpha^1, \lambda^1, \rho^1, \beta^1, \sigma^1, \xi^1$, und Identitäten darstellen lassen, genauer: so dass $\varphi: P \longrightarrow Q$ Bild eines Weges von u nach v beim Einsetzen von $Id_{\mathfrak{M}}, Id_{\mathfrak{C}}, X$ und $B_1, \ldots, B_n$ bzw. $Id_{\mathfrak{N}}, Id_{\mathfrak{C}}, Y$ und $B_1, \ldots, B_n$ ist.

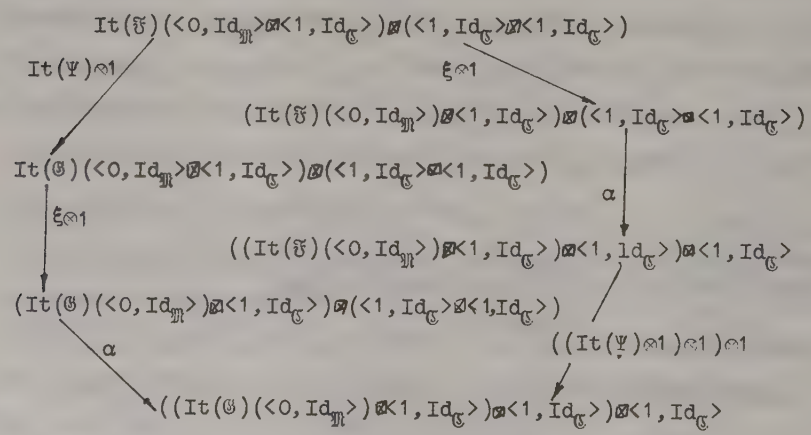
Beispiel:



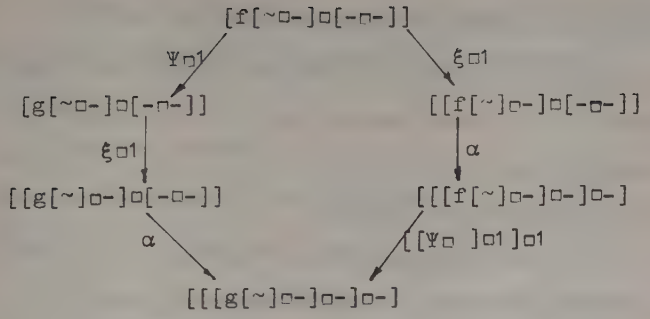
kommutiert, wenn das folgende Diagramm kommutiert:



das ist dasselbe wie das nächste Diagramm:



Das letzte Diagramm kommutiert, da es das Bild von dem folgenden Diagramm ist, und $It(\Psi)$ ein $It(\mathfrak{C})$-Morphismus ist.


[f[~□-]□[-□-]]
Ψ□1
ξ□1
[g[~□-]□[-□-]]
[[f[~]□-]□[-□-]]
ξ□1
α
[[g[~]□-]□[-□-]]
[[[f[~]□-]□-]□-]
α
[[Ψ□]□1]□1
[[[g[~]□-]□-]□-]

§7 Kohärenz in symmetrischen monoidalen Kategorien

Wir betrachten nun eine symmetrische monoidale Kategorie $(\mathbb{C},\otimes)$, d.h. eine Kategorie $\mathbb{C}$, mit einem Funktor $\otimes:\mathbb{C}\times\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$, mit natürlichen Isomorphismen α,γ, so dass:

$\forall\, A,B,C \in Ob(\mathbb{C})$: $\alpha: A\otimes(B\otimes C) \cong (A\otimes B)\otimes C$,

γ: $A\otimes B \cong B\otimes A$, mit $\gamma^2=1$ (0),

so dass die folgenden Diagramme kommutieren:

$$\begin{array}{ccccc} A\otimes(B\otimes(C\otimes D)) & \xrightarrow{\alpha} & (A\otimes B)\otimes(C\otimes D) & \xrightarrow{\alpha} & ((A\otimes B)\otimes C)\otimes D \\ \downarrow{\scriptstyle 1\otimes\alpha} & & & & \downarrow{\scriptstyle \alpha\otimes 1} \\ A\otimes((B\otimes C)\otimes D) & & \xrightarrow{\alpha} & & (A\otimes(B\otimes C))\otimes D \end{array} \qquad (1)$$

$$\begin{array}{ccccc} A\otimes(B\otimes C) & \xrightarrow{\alpha} & (A\otimes B)\otimes C & \xrightarrow{\gamma} & C\otimes(A\otimes B) \\ \downarrow{\scriptstyle 1\otimes\gamma} & & & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} \\ A\otimes(C\otimes B) & \xrightarrow{\alpha} & (A\otimes C)\otimes B & \xrightarrow{\gamma} & (C\otimes A)\otimes B \end{array} \qquad (2)$$

Unser Ziel hier ist zu zeigen, dass die Bedingung (0) mit der Kommutativät der Diagramme (1) und (2) Kohärenzbedingungen sind, d.h. die Bilder von zwei Wegen zwischen zwei Worten gleich sind.

Wie bei §1, definieren wir eine Menge $M:=\{-,[,],\square\}$, dazu die Menge Z (Menge der Zeichenreihen mit Buchstaben aus M), dann bilden wir die Menge W_1 als kleinste Teilmenge von Z, mit bestimmten Eigenschaften. Dann konstruieren wir die Menge W, deren Elemente Worte heissen, und von der Form: (w,s) sind, wobei $w\in W_1$, $s\in S_n$, die symmetrische Gruppe auf n Buchstaben, $n=\#(w)$. Die Bilder der Worte sind die Objekte der symmetrischen monoidalen Kategorie.

7.1 Definition: Seien $M:=\{[,],\square,-\}$

$Z:=\{\emptyset\}\cup M\cup M^2\cup\ldots$ (Menge der Zeichenreihen mit

Buchstaben aus M)

Sei W_1 die kleinste Teilmenge von Z, so dass:

i) $-\varepsilon W_1$

ii) $u,v\varepsilon W_1 \Rightarrow [u\square v]\varepsilon W_1$.

Existenz von W_1: wie beim 1.Kapitel

Wir definieren jetzt W "die Menge aller Worte"

$W:=\{(u,s)\,|\,u\varepsilon W_1, s\varepsilon S_n, n=\#(u)\}$,

und definieren:

$$[(u,s)\square(v,t)]:=([u\square v],r),\ r(i)=\begin{cases} s(i) & ,i\leq\#(u)\\ t(i-\#(u))+\#(u) & ,i>\#(u)\end{cases}$$

Wir schreiben häufig u statt (u,s), wenn das nicht missverständlich ist.

7.2 Definition: Seien:

$T:=\{[,],\square,1,\alpha,\gamma,\bar{\alpha}^1,\bar{\gamma}^1\}$

$Y:=\{\phi\}\cup T\cup T^2\cup\ldots$ (Menge der Zeichenreihen mit Buchstaben aus T)

$k_\alpha:=\{([(u,r)\square[(v,s)\square(w,t)]],[[(u,r)\square(v,s)]\square(w,t)],\alpha)\,|$
$(u,r),(v,s),(w,t)\varepsilon W\}$

$k_{\bar{\alpha}^1}:=\{([[(u,r)\square(v,s)]\square(w,t)],[(u,r)\square[(v,s)\square(w,t)]],\bar{\alpha}^1)\,|$
$(u,r),(v,s),(w,t)\varepsilon W\}$

$k_\gamma:=\{([(u,r)\square(v,s)],[(v,s)\square(u,r)],\gamma)\,|\,(u,r),(v,s)\varepsilon W\}$

$k_{\bar{\gamma}^1}:=\{([(u,r)\square(v,s)],[(v,s)\square(u,r)],\bar{\gamma}^1)\,|\,(u,r),(v,s)\varepsilon W\}$

Sei $\psi_i\ \varepsilon\{\alpha,\gamma,\bar{\alpha}^1,\bar{\gamma}^1\}$, $i\varepsilon N$

$K(k_{\psi_i})$ (oder einfacher $K(\psi_i)$) sei die kleinste Teilmenge von $W\times W\times Y$, die k_{ψ_i} enthält, mit:

$((u,r),(v,s),\varphi)\varepsilon K(k_{\psi_i}) \Rightarrow \forall\ (w,t)\varepsilon W$:

1) $([(u,r)\square(w,t)],[(v,s)\square(w,t)],[\varphi\square 1])\varepsilon K(k_{\psi_i})$

2) $([(w,t)\square(u,r)],[(w,t)\square(v,s)],[1\square\varphi])\varepsilon K(k_{\psi_i})$

Existenz von $K(k_{\psi_i})$: wie in §1.

Eine Kante ist ein Element in $K(k_{\psi_i})$, das ist ein Tripel, die dritte Komponente in diesem Tripel heisst Pfeilkante.

$K(\psi_1,\ldots,\psi_m) := K(\psi_1)\cup\ldots\cup K(\psi_m)$, $m\varepsilon N$

Mit K meinen wir $K(\alpha,\gamma,\bar{\alpha}^1,\bar{\gamma}^1)$

Mit $\overline{K}$ meinen wir die Menge aller Pfeilkanten in K. Im Speziellen $\overline{K}(\psi_i)$ bedeutet die Menge aller Pfeilkanten in $K(\psi_i)$.

Wir definieren insbesondere $L(\gamma,\bar{\gamma}^1)$ als die kleinste Teilmenge aller Mengen V, die die folgenden Eigenschaften erfüllen:

i) $(([-\square-],i),([-\square-],(12)),\gamma)\varepsilon V \wedge (([-\square-],(12)),([-\square-],i),\gamma)\varepsilon V \wedge$
$(([-\square-],i),([-\square-],(12)),\bar{\gamma}^1)\varepsilon V \wedge (([-\square-],(12)),([-\square-],i),\bar{\gamma}^1)\varepsilon V$

ii) $((u,r),(u,s),\varphi)\varepsilon V \Rightarrow \forall(w,t)\varepsilon W:$
$([(u,r)\square(w,t)],[(u,s)\square(w,t)],[\varphi\square 1])\varepsilon V \wedge$
$([(w,t)\square(u,r)],[(w,t)\square(u,s)],[1\square\varphi])\varepsilon V.$

Mit $\overline{L}(\gamma,\bar{\gamma}^1)$ meinen wir die Menge aller Pfeilkanten in $L(\gamma,\bar{\gamma}^1)$.
Analog definiert man $L(\gamma), L(\bar{\gamma}^1), \overline{L}(\gamma)$ und $\overline{L}(\bar{\gamma}^1)$

7.3 Bemerkung: $\forall (u,s),(v,t)\varepsilon W: (u,s)=(v,t) \Leftrightarrow u=v \wedge s=t.$

7.4 Definition: Ein Weg von (u,s) nach (v,t) (wobei $(u,s),(v,t)\varepsilon W$) ist eine Folge von Kanten aus $K(\psi_i)$:
$((u,s),(w,r),\varphi),((w,r),(x,p),\psi),\ldots,((y,q),(v,t),\Psi).$

7.5 Definition: "Die Bilder":
Gegeben $\mathbb{C}$ eine symmetrische monoidale Kategorie, und $B\varepsilon Ob(\mathbb{C})$. Hier ist die Situation sehr ähnlich zur Situation in §1. Die Worte (ohne Permutationen geschrieben) bilden eine Peano-Algebra. Man definiert das einzige "g", das mit dem einzigen "s" korrespondiert, also hat man nach 0.14 genau eine Abbildung
$h: W \longrightarrow Ob(\mathbb{C})$, so dass:

$h(-)=B,$

$\forall u,v\varepsilon W: h([u\square v]) = h(u)\otimes h(v) := u_B \otimes v_B$

Die Kanten bilden eine Peano-Algebra, man definiert die zwei

möglichen g's,
die mit den zwei s's korrespondieren, also existiert wieder nach 0.14 genau eine Abbildung $h_1: K \longrightarrow \mathbb{C}$, so dass:

$\forall\, \varphi \in \{\alpha, \gamma, \bar{\alpha}^1, \bar{\gamma}^1\}$: $h_1(u,v,\varphi) := (h(u), h(v), \varphi)$,

$\forall\, (u,v,\varphi) \in K$, $\forall\, w \in W$:

$h_1([u \square w], [v \square w], [\varphi \square 1]) := (h([u \square w]), h([v \square w]), \varphi \otimes 1)$

$h_1([w \square u], [w \square v], [1 \square \varphi]) := (h([w \square u]), h([w \square v]), 1 \otimes \varphi)$

7.6 Lemma: Zu jeder Kante $(u,v,\varphi) \in K(\gamma, \bar{\gamma}^1)$ gibt es einen Weg mit Kanten aus $K(\alpha, \bar{\alpha}^1) \cup UL(\gamma)$, so dass das Bild der Kante gleich das Bild des Weges ist.

Beweis: Wegen (0) in der Definition einer symmetrischen monoidalen Kategorie, reicht es den Fall $(u,v,\varphi) \in K(\gamma)$ zu betrachten. Beweis ist durch Induktion nach $\#_{\square}(u)$.

Induktionsanfang: $\#_{\square}(u) = 0 \Rightarrow$ es gibt keine Kante (u,v,φ)

Induktionsannahme: Sei Behauptung richtig für $\#_{\square}(u) \leq n$

Induktionsschluss: $\#_{\square}(u) = n+1$. Wir haben die folgenden Möglichkeiten:

1) $\varphi = \gamma$

2) $\varphi = [1 \square \psi]$, d.h. $(u,v,\varphi) = ([w \square p], [w \square q], [1 \square \psi])$, $(p,q,\psi) \in K(\gamma), w \in W$.

3) $\varphi = [\psi \square 1]$, d.h. $(u,v,\varphi) = ([p \square w], [q \square w], [\psi \square 1])$, $(p,q,\psi) \in K(\gamma), w \in W$.

Falls $\varphi = [1 \square \psi]$, gibt es für die Kante (p,q,ψ) einen Weg mit Kanten aus $K(\alpha) \cup UL(\gamma)$, so dass das Bild der Kante = Bild des Weges (nach Induktionsannahme). Durch "Tensorieren" von links mit w folgt die Behauptung unmittelbar. Analog für den Fall $\varphi = [\psi \square 1]$.

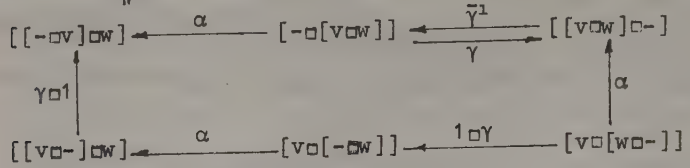
Falls $\varphi = \gamma$, ist $u = [u_1 \square u_2]$. Falls $\#_{\square}(u_1) \geq 1$: $u_1 = [p \square q]$, haben wir:

$$\begin{array}{ccccc}
[p \square [q \square u_2]] & \xrightarrow{\alpha} & [[p \square q] \square u_2] & \xrightarrow{\gamma} & [u_2 \square [p \square q]] \\
\downarrow{\scriptstyle 1 \square \gamma} & & & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} \\
[p \square [u_2 \square q]] & \xrightarrow{\alpha} & [[p \square u_2] \square q] & \xrightarrow{\gamma \square 1} & [[u_2 \square p] \square q]
\end{array}$$

wobei $([q \square u_2], [u_2 \square q], \gamma), ([p \square u_2], [u_2 \square p], \gamma) \in K(\gamma)$. Das Bild des Diagrammes kommutiert nach (2). Nach Induktionsannahme folgt

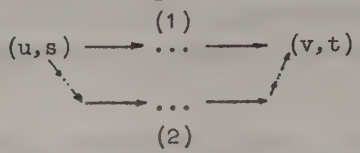
Falls $\varphi=\gamma$, $\|_\alpha(u_1)=0=\|_\alpha(u_2)$, haben wir $([-\square-],[-\square-],\gamma) \Rightarrow$ die Behauptung.

Falls $\varphi=\gamma$, $\|_\alpha(u_1)=0$, $\|_\alpha(u_2)\neq 0$: setze man $u_2=[v\square w]$, wir haben:

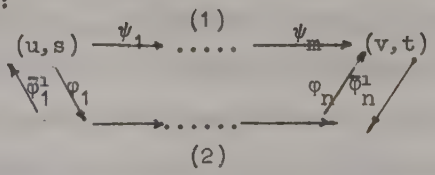


Das Bild des Diagrammes kommutiert nach (2). $([v\square-],[-\square v],\gamma)$, $([w\square-],[-\square w],\gamma) \in K(\gamma)$. Nach Induktionsannahme folgt die Behauptung. Man bemerkt, dass wir die Voraussetzung $\gamma^2 = 1$ ausgenutzt haben.

Unser Ziel, wie beim Anfang des Kapitels gesagt, ist es zu zeigen, dass das Bild eines Diagramms



kommutiert, wobei die Wege (1) und (2) beliebig, und mit Kanten aus $K(\alpha,\bar{\alpha}^1) \cup L(\gamma,\bar{\gamma}^1)$. Es genügt zu zeigen, dass das Bild eines beliebigen Weges $(u,s) \longrightarrow \ldots \longrightarrow (u,s)$ die Identität ist. Sei nämlich:



Wir ersetzen die Kanten $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ durch formale inverse Kanten.

Bild $(\bar{\varphi}_1^1 \circ \ldots \circ \bar{\varphi}_n^1 \circ \psi_m \circ \ldots \circ \psi_1) = \bar{\varphi}_1^1 \circ \ldots \circ \bar{\varphi}_n^1 \circ \psi_m \circ \ldots \circ \psi_1 = 1 \Rightarrow$

(da die Bilder der $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ Isomorphismen sind)

$\psi_m \circ \ldots \circ \psi_1 = \varphi_n \circ \ldots \circ \varphi_1$.

Wir zeigen, dass ein Weg von $(u,1)$ nach (u,s) immer existiert, also

es genügt zu zeigen, dass man durch Substitution für einen beliebigen Weg die Identität bekommt (ein beliebiger Weg etwa $(u,1) \longrightarrow \ldots \longrightarrow (u,1)$).

7.7 Bemerkung und Definition: Es gibt eine Darstellung $S_n \cong F/R$, wobei F freie Gruppe mit Erzeugenden $\tau_1,\ldots,\tau_{n-1}$, R Untergruppe von F. Nach [1] ist die Menge der erzeugenden Relationen für R:

$d_1 = \tau_i^2$, $i = 1,\ldots,n-1$

$d_2 = \tau_i\tau_j\bar{\tau}_i^1\bar{\tau}_j^1$, $1 \leqslant i < j-1 \leqslant n-2$.

$d_3 = (\tau_i\tau_{i+1})^3$, $i=1,\ldots,n-2$

Jetzt definieren wir die Abbildung $\tau: K(\alpha,\bar{\alpha}^1) \cup L(\gamma,\bar{\gamma}^1) \longrightarrow F$:

$$\tau(k) = \begin{cases} \mathrm{id}, & k \in K(\alpha,\bar{\alpha}^1) \\ (12), & k=(([-\square-],\mathrm{id}),([-\square-],(12)),\gamma) \\ (12)^{-1}, & k=(([-\square-],\mathrm{id}),([-\square-],(12)),\bar{\gamma}^1) \\ (12), & k=(([-\square-],(12)),([-\square-],\mathrm{id}),\gamma) \\ (12)^{-1}, & k=(([-\square-],(12)),([-\square-],\mathrm{id}),\bar{\gamma}^1) \\ (1,i+1)^{\pm 1}, & k=([u\square w],[v\square w],[\varphi\square 1]), \text{wenn } \tau((u,v,\varphi))=(i,i+1)^{\pm 1} \\ (\#(w)+i,\#(w)+i+1)^{\pm 1}, & k=([w\square u],[w\square v],[1\square\varphi]), \text{wenn } \tau((u,v,\varphi))=(i,i+1)^{\pm 1} \end{cases}$$

Sei W Weg, $W=((u,s),(w,r),\varphi)(=k_1),((w,r),(x,p),\chi)(=k_2),\ldots,((y,q),(v,t),\psi)(=k_m)$, dann definiert man $\tau(W) := \tau(k_1)\ldots\tau(k_m)$

Analog definiert man $\sigma: K(\alpha,\bar{\alpha}^1) \cup L(\gamma,\bar{\gamma}^1) \longrightarrow S_n$, $\sigma(W)$, W Weg.

Wir schreiben $\tau(\varphi)$ (bzw. $\sigma(\varphi)$) statt $\tau(u,v,\varphi)$ (bzw. $\sigma(u,v,\varphi)$)

Wir werden häufig $(i,i+1)$ statt τ_i schreiben

Wir beweisen jetzt das folgende nützliche Lemma:

7.8 Lemma: Sei $((u,s),(u,t),\varphi) \in L(\gamma,\bar{\gamma}^1) \Rightarrow t = s\sigma(\varphi)$.

Beweis: durch Induktion nach φ.

(Es ist leicht zu zeigen, dass:

$(L(\gamma,\bar{\gamma}^1),(s_{1,w},s_{2,w}),(l_{1,\gamma},l_{2,\gamma},l_{1,\bar{\gamma}^1},l_{2,\bar{\gamma}^1}))$ eine Peano-Algebra ist, wobei:

$s_{1,w}: L(\gamma,\bar{\gamma}^1) \longrightarrow L(\gamma,\bar{\gamma}^1)$

$(u,v,\varphi) \longmapsto ([u\square w],[v\square w],[\varphi\square 1])$

$s_{2,w}: L(\gamma,\bar{\gamma}^1) \longrightarrow L(\gamma,\bar{\gamma}^1)$

$(u,v,\varphi) \longmapsto ([w\square u],[w\square v],[1\square\varphi])$

(Die Worte sind ohne Permutationen geschrieben)

$l_{1,\gamma} := (([-\square-],\mathrm{id}),([-\square-],(12)),\gamma)$

$l_{2,\gamma} := (([-\square-],(12)),([-\square-],\mathrm{id}),\gamma)$

$l_{1,\bar{\gamma}^1} := (([-\square-],\mathrm{id}),([-\square-],(12)),\bar{\gamma}^1)$

$l_{2,\bar{\gamma}^1} := (([-\square-],(12)),([-\square-],\mathrm{id}),\bar{\gamma}^1)$

also ist Induktion nach φ sinnvoll)

Induktionsanfang: $\varphi=\gamma$ V $\varphi=\bar{\gamma}^1$, wir haben die möglichen Kanten $l_{1,\gamma}, l_{2,\gamma}, l_{1,\bar{\gamma}^1}, l_{2,\bar{\gamma}^1}$, also folgt die Behauptung direkt.

Induktionsannahme: Behauptung richtig für φ und $\tau(\varphi) = (i,i+1)$

Induktionsschluss: i) $\varphi\square 1$:

Wir betrachten $([(u,s)\square(w,t)],[(u,s(i,i+1))\square(w,t)],[\varphi\square 1])$. Seien:

$[(u,s)\square(w,t)] = ([u\square w],r)$, $[(u,s(i,i+1))\square(w,t)] = ([u\square w],p)$

Behauptung: $p = r\sigma([\varphi\square 1])$

Beweis:
$$r(j) = \begin{cases} s(j), & j \leq \dagger(u) \\ t(j-\dagger(u))+\dagger(u), & j > \dagger(u). \end{cases}$$

$$p(j) = \begin{cases} s(i,i+1)(j), & j \leq \dagger(u) \\ t(j-\dagger(u))+\dagger(u), & j > \dagger(u) \end{cases}$$

$$r\sigma([\varphi\square 1])(j) = r(i,i+1)(j)$$

Falls $j \leq \dagger(u)$, $j=i$:

$r\sigma([\varphi\square 1])(j) = r(i,i+1)(j) = r(i,i+1)(i) = r(i+1) = s(i+1)$

$p(j) = p(i) = s(i,i+1)(i) = s(i+1)$

falls $j \leq \#_1(u)$, $j=i+1$:

$r\sigma([\varphi \square 1])(j) = r(i,i+1)(i+1) = r(i) = s(i)$

$p(j) = p(i+1) = s(i,i+1)(i+1) = s(i)$.

falls $j \leq \#_1(u)$, $i \neq j \neq i+1$:

$r\sigma([\varphi \square 1])(j) = r(i,i+1)(j) = r(j) = s(j)$.

$p(j) = s(i,i+1)(j) = s(j)$.

falls $j > \#_1(u)$: da $i+1 \leq \#_1(u)$,folgt:

$r([\varphi \square 1])(j) = r(i,i+1)(j) = t(j-\#_1(u))+\#_1(u) = p(j)$

Also folgt die Behauptung.

ii) $1 \square \varphi$

Wir betrachten: $([(w,s) \square (u,t)],[(w,s) \square (u,t(i,i+1))],[1 \square \varphi])$. Seien:

$[(w,s) \square (u,t)] = ([w \square u],r)$, $[(w,s) \square (u,t(i,i+1))] = ([w \square u],p)$,

Behauptung: $p = r\sigma([1 \square \varphi])$

Beweis:

$$r(j) = \begin{cases} s(j) & , j \leq \#_1(w) \\ t(j-\#_1(w))+\#_1(w), & j > \#_1(w) \end{cases}$$

$$p(j) = \begin{cases} s(j) & , j \leq \#_1(w) \\ t(i,i+1)(j-\#_1(w))+\#_1(w) & , j > \#_1(w) \end{cases}$$

Falls $j \leq \#_1(w)$:

$r\sigma([1 \square \varphi])(j) = r(\#_1(w)+i, \#_1(w)+i+1)(j) = r(j) = s(j) = p(j)$

falls $j = i+\#_1(w)$:

$p(j) = t(i,i+1)(i)+\#_1(w) = t(i+1)+\#_1(w)$

$r\sigma([1 \square \varphi])(j) = r(\#_1(w)+i, \#_1(w)+i+1)(i+\#_1(w)) = r(\#_1(w)+i+1)$

$= t(i+1)+\#_1(w)$

falls $j = i+1+\#_1(w)$:

$p(j) = t(i,i+1)(i+1)+\#_1(w) = t(i)+\#_1(w)$

$r([1 \square \varphi])(j) = r(\#_1(w)+i, \#_1(w)+i+1)(i+1+\#_1(w)) = r(\#_1(w)+i)$

$= t(1)+\#_1(w)$

falls $j > \#_1(w)$, $j \notin \{\#_1(w)+i, \#_1(w)+i+1\}$:

$p(j) = t(j-\#_1(w))+\#_1(w)$

$r\sigma([1 \square \varphi])(j) = r(\#_1(w)+i, \#_1(w)+i+1)(j) = r(j) = t(j-\#_1(w))+\#_1(w)$

Also folgt die Behauptung.

Wir zeigen jetzt, dass ein Weg von (u,1) nach (u,s) immer existiert:

7.9 Lemma: Es gibt einen Weg von (u,1) nach (u,s), mit Kanten aus $K(\alpha,\bar{\alpha}^1) \cup UL(\gamma,\bar{\gamma}^1)$, wobei $s = (i_1,i_1+1)\ldots(i_n,i_n+1) \in S_m$, $\#^-(u)=m \geq 2$

Beweis: durch Induktion nach n.

Induktionsanfang: n=1. Zu zeigen: Es gibt einen Weg von (u,1) nach (u,(i,i+1)).

Beweis: Sei $u'=[[v\square[-\square-]]\square w]$, $\#^-(v)=i-1, i\neq 1$ (falls i=1: wählt man $u'=[[-\square-]\square w]$), $\#^-(w)=m-i-1$. Nach dem Satz 21 in §1 existiert ein Weg von (u,1) nach (u',1) mit Kanten aus $K(\alpha,\bar{\alpha}^1)$. Dann existiert eine Kante $k=((u',1),(u',(i,i+1)),[[1\square\gamma]\square 1])$, $\sigma(k)=(i,i+1)$. Nach dem Satz 1.21 wieder, existiert ein Weg mit Kanten aus $K(\alpha,\bar{\alpha}^1)$, von (u',(i,i+1)). Also folgt Induktionsanfang.

Induktionsannahme: Sei Behauptung richtig für n.

Induktionsschluss: auf n+1: Zu zeigen: $\exists$ ein Weg von (u,1) nach (u,s) $s=(i_1,i_1+1)\ldots(i_n,i_n+1)(i_{n+1},i_{n+1}+1)$

Beweis: genau wie beim Induktionsanfang. Sei $\#^-(u)=m \geq 2$. Nach Induktionsannahme $\exists$ ein Weg von (u,1) nach (u,t), $t=(i_1,i_1+1)\ldots(i_n,i_n+1)$. Jetzt nach dem Satz 1.21 existiert ein Weg mit Kanten aus $K(\alpha,\bar{\alpha}^1)$ von (u,t) nach (u',t), wobei $u'=[[v\square[-\square-]]\square w]$, $\#^-(v)=i_{n+1}-1$ falls $i_{n+1}\neq 1$. (Falls $i_{n+1}=1$, wählt man $u'=[[-\square-]\square w]$, $\#^-(w)=m-i_{n+1}-1$). Jetzt existiert eine Kante $k=((u',t),(u',s),[[1\square\gamma]\square 1])$, $\sigma(k)=(i_{n+1},i_{n+1}+1)$. Nach Lemma 7.8 ist $s=t(i_{n+1},i_{n+1}+1)$. Nach Satz 1.21 existiert ein Weg mit Kanten aus $K(\alpha,\bar{\alpha}^1)$ von (u',s) nach (u,s). Also die Behauptung.

Wir beweisen jetzt ein Lemma, das aus Lemma 7.8 folgt:

7.10 Lemma: Sei W ein Weg von (u,1) nach (u,s) mit Kanten aus

$K(\alpha,\bar{\alpha}^1) \cup L(\gamma,\bar{\gamma}^1) \Rightarrow \sigma(W) = s$

Beweis: durch Induktion nach Anzahl der Kanten.

Induktionsanfang: Anzahl der Kanten = 1 : $\exists 2$ Möglichkeiten:

i) $W = ((u,1),(u,s),\varphi) \in L(\gamma,\bar{\gamma}^1) \Rightarrow \sigma(W) = \sigma(\varphi) = s$

ii) $W = ((u,1),(v,1),\varphi) \in K(\alpha,\bar{\alpha}^1) \Rightarrow \sigma(W) = \sigma(\varphi) = 1$

Induktionsannahme: Gelte Behauptung, falls Anzahl der Kanten $\leq n$

Induktionsschluss: Anzahl der Kanten = n+1: $\exists 2$ Möglichkeiten:

i) $W = \underbrace{(u,1) \xrightarrow{\varphi_1} \cdots \xrightarrow{\varphi_n} (v,s)}_{V} \xrightarrow{\varphi_{n+1}} (u,s)$, d.h.

$((v,s),(u,s),\varphi_{n+1}) \in K(\alpha,\bar{\alpha}^1)$

ii) $W = \underbrace{(u,1) \xrightarrow{\varphi_1} \cdots \xrightarrow{\varphi_n} (u,t)}_{V} \xrightarrow{\varphi_{n+1}} (u,s)$, d.h.

$((u,t),(u,s),\varphi_{n+1}) \in L(\gamma,\bar{\gamma}^1)$

Fall i) : $\sigma(W) = \sigma(V)\sigma(\varphi_{n+1}) = \sigma(V).1 = s$ (nach Induktionsannahme)

Fall ii) : $\sigma(W) = \sigma(V)\sigma(\varphi_{n+1}) = t\sigma(\varphi_{n+1})$ (nach Induktionsannahme)

$= s$ (nach Lemma 7.8)

$\Rightarrow$ Behauptung.

<u>Folgerung</u>: Falls $s = 1 \Rightarrow \sigma(W) = 1$, es folgt nach Definitionen von σ,τ, dass $\tau(W) \in R$, d.h. $\tau(W) = d_1^{\pm 1} \ldots d_m^{\pm 1}$, wobei $d_1,\ldots,d_m \in R$ Erzeugenden Relationen, die die Untergruppe R erzeugen.

Als Vorbereitung für den Beweis des Hauptsatzes fangen wir mit einer neuen Struktur W_N an, das ist, wie gleich bewiesen wird, eine Peano-Algebra. Die Elemente aus W_N nennen wir auch "Worte".

$W_N := \{(u,i) \mid u \in W,\ 1 \leq i \leq \#(w)\}$. Für alle $u \in W$: $[u\square.]$ und $[.\square u]$ sind die Familie der Abbildungen $S = (s_j)_{j \in N}$. Diese sind folgendermassen definiert:

$\forall\, u \in W$: $[u\square(v,i)] := ([u \square v], \#(u)+i)$

$[(v,i)\square u] := ([v \square u], i)$

Die Familie $X = (x_i)_{i \in L}$ besteht aus einem Glied $(-,1)$. Wir zeigen jetzt, dass:

7.11 Lemma: $(W_N, S, (-,1))$ ist eine Peano-Algebra vom Typ $(1,\chi,1,\alpha,\beta)$, wobei $\forall j\in N: \alpha(j)=1, \beta(1)=1$.

Beweis: Da die Familie $X=(X_i)_{i\in M}$ aus einem Glied W_N besteht, ist 1') bei 0.2 Triviallerweise erfüllt.

Zu zeigen: $\forall i,j\in N; i\neq j$: $Bi(s_i)\cap Bi(s_j)=\phi$

Annahme: $\exists\, i,j\in N; i\neq j$: $Bi(s_i)\cap Bi(s_j)\neq\phi \Rightarrow \exists u,u'\in W, (v,l),(v',k)\in W_N$:

$[u\sqcap(v,l)]=[u'\sqcap(v',k)] \vee [(v,l)\sqcap u]=[(v',l)\sqcap u'] \vee$

$[u\sqcap(v,l)]=[(v',k)\sqcap u'] \vee [(v,l)\sqcap u]=[u'\sqcap(v',k)]$

Falls $[u\sqcap(v,l)] = [u'\sqcap(v',k)] \Rightarrow ([u\sqcap v],l) = ([u'\sqcap v'],k) \Rightarrow u=u'$:

Widerspruch zu $i\neq j$.

Falls $[(v,l)\sqcap u] = [u'\sqcap(v',k)] \Rightarrow ([v\sqcap u],l) = ([u'\sqcap v'], \#(u')+k) \Rightarrow$

$\Rightarrow v=u' \wedge \#(u')=l-k= \#(v) < l \Rightarrow v\notin W_N$: Widerspruch.

Rest analog.

Zu zeigen: $\forall j\in N$: s_j injektiv.

$[u\sqcap(v,l)] = [u\sqcap(v',k)] \Rightarrow ([u\sqcap v], \#(u)+l) = ([u\sqcap v'], \#(u)+k) \Rightarrow$

$v=v' \wedge l=k$.

$[(v,l)\sqcap u] = [(v',k)\sqcap u] \Rightarrow ([v\sqcap u],l) = ([v'\sqcap u],k) \Rightarrow v=v' \wedge l=k$

Da die Familie X aus einem Glied $(-,1)$ besteht, folgt 3')a) bei 0.2 triviallerweise.

$(-,1)$ ist kein Bild von irgend s_i, da die Bilder die Form $([u\sqcap v],i)$ oder die Form $([u\sqcap v], \#(u)+i)$ haben, und für alle $u,v\in W$: $[u\sqcap v]\neq$-

Das ist 3')b) bei 0.2 .

Wir zeigen jetzt 4') :"$\Rightarrow$" : trivial.

"$\Leftarrow$": durch Induktion nach $\#(u)$:

Induktionsanfang: $\#(u)=1 \Rightarrow A(u)$ nach 1) bei 4')

Induktionsannahme: Sei $A(u)$ für alle $u\in \bigcup_{i\in M} X_i$, mit $\#(u) \leqslant n$.

Induktionsschluss: $\#(u)=n+1$:

Sei $(-,1)=(u,i)\in W_N$. Dann ist $(u,i)=([u_1\sqcap u_2],i)$. Falls $i \leqslant \#(u_1)$, wählt man $s_j=[.\sqcap u_2]$, operiert man s_j auf (u_1,i), die mit $A(u_1,i)$ nach Induktionsannahme, also folgt nach 2) bei 4') Definition 0.2

$([u_1 \square u_2],i)$ mit $A([u_1 \square u_2],i)$, d.h. (u,i), mit $A(u,i)$.
Falls $i \geq \#(u_1)$ sie $k=i-\#(u_1)$. Man wähle $s_j=[u_1 \square .]$, operiere s_j auf (u_2,k), die mit $A(u_2,k)$ nach Induktionsannahme ist, also erhält man $s_j(u_2,k)=[u_1 \square (u_2,k)]=([u_1 \square u_2],\#(u_1)+k) = (u,i)$, und nach 2) bei 4') Definition 2) folgt (u,i) mit $A(u,i)$. Also haben wir gezeigt, dass $(W_N,S,(-,1))$ Peano-Algebra ist.

Wir definieren jetzt $\forall w,v \in W_1$ die Abbildungen $g_{w,r}$, und $g_{v,l}$ folgendermassen:

$$g_{w,r} : W_N \times W_1 \longrightarrow W_1$$
$$((u,i),x) \longmapsto [x \square w]$$

$$g_{v,l} : W_N \times W_1 \longrightarrow W_1$$
$$((u,i),x) \longmapsto [v \square x]$$

d.h. das Bild ist unabhängig von (u,i).
Nach 0.14 folgt dass genau eine Abbildung $R: W_N \longrightarrow W_1$ existiert, so dass:

$R((-,1)) = [-\square-]$,
$\forall (u,i) \in W_N, w \in W_1 : R([(u,i) \square w]) = g_{w,r}((u,i),R(u,i)) = [R(u,i) \square w]$
$\forall (u,i)\ W_N, w\ W_1 : R([v \square (u,i)]) = g_{v,l}((u,i),R(u,i)) = [v \square R(u,i)]$
In ungenaueren einfachen Worten sagen wir, dass die Abbildung R auf (u,i) "alles" in sich abbildet, bis auf die i^{th} -, die in $[-\square-]$ abbildet. Die erste "-" wird wieder die i^{th} -, beim neuen Wort, die zweite wird die $i+1^{th}$ -

Ähnlich zur Definition von $k_\alpha, \ldots$ bezuglich der Worte in W, definieren wir $k_\alpha, \ldots$ bezuglich der Worte in W_N. Wir schreiben die Worte ohne die Permutationen, d.h. statt $(w,s), w \in W_1, s \in S_n, (w,s) \in W$, schreiben wir einfach w und meinen (w,s).

$k_\alpha := \{(([u \square [v \square w]],i),([[u \square v] \square w],i),\alpha) \mid u,v,w \in W_1\}$
$k_{\bar{\alpha}^1} := \{(([[u \square v] \square w],i),([u \square [v \square w]],i)\ \bar{\alpha}^1) \mid u,v,w \in W_1\}$

$k_\gamma := (([-\square-],i),([-\square-],i),\gamma)$

$k_{\bar\gamma^1} := (([-\square-],i),([-\square-],i),\bar\gamma^1)$

Sei $\varphi_j \in \{\alpha, \bar\alpha^1, \gamma, \bar\gamma^1\}$

$K(k_{\varphi_j})$ sei die kleinste Teilmenge von $W_N \times W_N \times Y$, die k_{φ_j} enthält, mit:

$((u,i),(v,i),\varphi) \in K(k_{\varphi_j}) \Rightarrow \forall w \in W_1 : (([u\square w],i),([v\square w],i),[\varphi\square 1]) \in K(k_{\varphi_j}) \wedge$

$$(([w\square u],\overline{\overline{\|}}(w)+i),([w\square v],\overline{\overline{\|}}(w)+i),[1\square\varphi]) \in K(k_{\varphi_j})$$

Wir schreiben hier K_1 und meinen $K(k_\alpha, k_{\bar\alpha^1}) := K(k_\alpha) \cup K(k_{\bar\alpha^1})$.

$K := (k_\alpha, k_{\bar\alpha^1})$.

Genau wie bei 7.2 definieren wir $K(\varphi_1,\ldots,\varphi_m) := K(\varphi_1) \cup \ldots \cup K(\varphi_m), m \in N$

$$:= K(k_{\varphi_1}) \cup \ldots \cup K(k_{\varphi_m})$$

Für alle $w \in W_1 : [w\square.]$ und $[.\square w]$ sind die Familie der Abbildungen

$S = (s_j)_{j \in N}$ definiert, wie gerade gegeben.

7.12 Lemma: $(K_1, S, \hat K)$ ist eine Peano-Algebra vom Typ $(1,\chi,2,\alpha,\beta)$, wobei

$\forall\, j \in N : \alpha(j)=1, \beta(1)=\beta(2)=1$.

Beweis: analog zum Beweis des Lemmas 7.11, im Bezug auf 0.2.

1') bei 0.2 ist triviallerweise erfüllt, da die Familie $X=(X_i)_{i \in M}$ nur aus einem Glied besteht.

Die Beweise zu 2')a) und 2')b) sind genau wie beim Lemma 7.11.

$k_\alpha \neq k_{\bar\alpha^1}$, sonst $\alpha = \bar\alpha^1$. Also folgt 3')a).

3')b) ist klar, sonst $((u,i),(v,i),\alpha) = ((u',i),(v',i),\varphi), l(\varphi) > 1$

($l(\varphi)$ ist definiert wie bei §1) $\Rightarrow \varphi = \alpha, l(\varphi) > 1 \Rightarrow \phi = s^1(\phi) \neq \phi$:

Widerspruch. (s^1 ist definiert wie in §1)

Zu 4') "$\Rightarrow$": trivial.

" ": durch Induktion nach $\overline{\overline{\|}}(u)$, wobei $k=((u,i),(v,i),\varphi) \in K_1$

Induktionsanfang: $\overline{\overline{\|}}(u)=1 \Rightarrow$ es gibt keine Kante k.

Induktionsannahme: A(u) für $\overline{\overline{\|}}(u) \leqslant n$

Induktionsschluss: $\overline{\overline{\|}}(u)=n+1$: Es gibt zwei Möglichkeiten:

i) $k=(([u\square w],i),([v\square w],i),[\varphi\square 1])$. Man wählt $k'=((u,i),(v,i),\varphi)$, mit A(k') (nach Induktionsannahme), dann operiert man $s_j=[.\square w]$ auf k' $\Rightarrow$ (nach 2) bei 4') Definition 0.2)) A(k).

ii) $k=(([w\square u],i),([w\square v],i),[1\square\varphi])$. Man wählt $k'=((u,i),(v,i),\varphi)$, wobei $i=i'-\overline{\overline{|}}(w)$, mit A(k') (nach Induktionsannahme), dann operiert man $s_j=[w\square.]$ auf k' $\Rightarrow$ A(k) (nach 2) bei 4') in Definition 0.2))

Also folgt die Behauptung.

13 Definition: Wir definieren die folgenden Abbildungen:

$\forall\, w\in W_1$: $g_{r,w}: K_1\times K \longrightarrow K$

$(k_1,k_2) \longmapsto [k_2\square w]$,

$g_{l,w}: K_1\times K \longrightarrow K$

$(k_1,k_2) \longmapsto [w\square k_2]$, wobei

für $k=((u,i),(v,i),\varphi)$ gelte:

$[k\square w]:=(([u\square w],i),([v\square w],i),[\varphi\square 1])$,

$[w\square k]:=(([w\square u],\overline{\overline{|}}(w)+i),([w\square v],\overline{\overline{|}}(w)+i),[1\square\varphi])$.

Mit $s_{r,w}:=[.\square w]$, $s_{l,w}:=[w\square.]$ existiert nach 0.14 genau eine Abbildung $R_1: K_1 \longrightarrow K$, so dass:

$\forall\, ((u,i),(v,i),\varphi)\in K_1 \wedge \varphi\in\{\alpha,\bar{\alpha}^1\}$:

$R_1((u,i),(v,i),\varphi) = (R(u,i),R(v,i),\varphi)$ (1),

$\forall w\in W_1, \forall((u,i),(v,i),\varphi)\ K_1$:

$R_1([((u,i),(v,i),\varphi)\square w]) = g_{r,w}(((u,i),(v,i),\varphi),R_1((u,i),(v,i),\varphi))$ (2),

$R_1([w\square((u,i),(v,i),\varphi)]) = g_{l,w}(((u,i),(v,i),\varphi),R_1((u,i),(v,i),\varphi))$

Behauptung: $R_1: K_1 \longrightarrow K$, definiert durch: (1), und:

$\forall\, w\ W_1, \forall((u,i),(v,i),\varphi)\in K_1$:

$R_1([((u,i),(v,i),\varphi)\square w]) = R_1(([u\square w],i),([v\square w],i),[\varphi\square 1]) :=$

$(R([u\square w],i),R([v\square w],i),[\varphi\square 1])$,

$R_1([w\square((u,i),(v,i),\varphi)]) = R_1(([w\square u],\overline{\overline{|}}(w)+i),([w\square v],\overline{\overline{|}}(w)+i),[1\square\varphi])$

$:= (R([w\square u],\overline{\overline{|}}(w)+i),R([w\square v],\overline{\overline{|}}(w)+i),[1\square\varphi])$

erfüllt (1) (trivial) und (2).

Beweis: $R_1([((u,i),(v,i),\varphi)\square w]) = (R([u\square w],i),R([v\square w],i),[\varphi\square 1])$
$=[(R(u,i),R(v,i),\varphi)\square w] = [R_1((u,i),(v,i),\varphi)\square w]$
$= g_{r,w}(((u,i),(v,i),\varphi),R_1((u,i),(v,i),\varphi))$. Rest analog.

Wir beweisen ein fundamentales Lemma, das wir an mehreren Stellen benutzen:

7.14 Lemma: Gegeben $(u,v,\varphi)\varepsilon L(\gamma,\bar{\gamma}^1)$, wobei $\tau((u,u,\varphi))=(i,i+1)^{\overset{+1}{-}}$.
Dann existiert genau ein $w\varepsilon W_1$, so dass $R(w,i) = u$.
(Man bemerkt, dass wir hier die Worte ohne Permutationen schreiben)
Beweis: Wir beweisen zunächst Existenz. Beweis durch Induktion nach $\#(u)$.
Induktionsanfang: $\#(u)= 1 \Rightarrow u=-$. Also existiert keine Kante.
Induktionsannahme: Sei Behauptung richtig falls $\#(u) \leq n$.
Induktionsschluss: $\#(u)=n+1 \Rightarrow u =[u_1 \square u_2], \#(u_1) \leq n \geq \#(u_2)$
i) Falls $i < \#(u_1) \Rightarrow$ (nach Induktionsannahme) $\exists\, w_1\varepsilon W_1 : R(w_1,i)=u_1$
$\Rightarrow R([w_1\square u_2],i) =[R(w_1,i)\square u_2] =[u_1\square u_2] = u$
ii) Falls $i > \#(u_1)$: Man setze $j=i-\#(u_1)$. Nach Induktionsannahme
$\exists\, w_2\varepsilon W_1 : R(w_2,j)=u_2 \Rightarrow R([u_1\square w_2],\#(u_1)+j) =[u_1\square R(w_2,j)]=[u_1\square u_2]=u$
Falls $i=\#(u_1)$: $\varphi\varepsilon\{\gamma,\bar{\gamma}^1\} \Rightarrow w=-, R(-,1)=[-\square-]=u$
$\varphi\notin\{\gamma,\bar{\gamma}^1\} \Rightarrow \varphi =[\psi\square 1] \vee \varphi =[1\square\psi]$, $u=[u_1\square u_2]\wedge[(u_1,u_1,\psi)\varepsilon L(\gamma,\bar{\gamma}^1) \vee (u_2,u_2,\psi)\varepsilon L(\gamma,\bar{\gamma}^1)]$
$\Rightarrow \tau(\varphi) = \tau(\psi) = (j,j+1)$, $j < \#(u_1)$ oder:
$\tau(\varphi) =(\#(u_1)+k,\#(u_1)+k+1)$ falls $\tau(\psi) = (k,k+1)$
$\Rightarrow \tau(\varphi) = (i,i+1)$, $i=\#(u_1)$: Widerspruch $\Rightarrow$ Existenz.
Wir zeigen jetzt die Eindeutigkeit. Wir zeigen: existieren $v,w\varepsilon W_1$: $R(v,i) = R(w,i) \Rightarrow v=w$.
Beweis: durch Induktion nach $\#(v)$ ($=\#(w)$, sonst $R(v,i)=R(w,i)$, da $l(R(v,i))=l(R(w,i))$. Es ist sehr leicht zu zeigen, dass : $\forall w\varepsilon W_1$ $l(w) = 4\#(w)-3$)

Induktionsanfang: $\doteq(v)=1 \Rightarrow v=- \doteq w \Rightarrow$ Behauptung.

Induktionsannahme: Sei Behauptung richtig für $\doteq(v) \leqslant n$.

Induktionsschluss: $\doteq(v)=n+1 \Rightarrow v=[v_1 \square v_2] \wedge w=[w_1 \square w_2]$

i) Falls $i \leqslant \doteq(v_1)$, $i \leqslant \doteq(w_1)$:

$[R(v_1,i) \square v_2] = R([v_1 \square v_2],i)=R([w_1 \square w_2],i)=[R(w_1,i) \square w_2]$

$\Rightarrow [R(v_1,i)=R(w_1,i) \wedge v_2=w_2] \Rightarrow$(nach Induktionsannahme)$[v_1=w_1 \wedge v_2=w_2] \Rightarrow v=w$.

ii) Falls $i > \doteq(v_1) \wedge i > \doteq(w_1)$: Man setze $j=i-\doteq(v_1)$, $k=i-\doteq(w_1) \Rightarrow [v_1 \square R(v_2,j)]= R([v_1 \square v_2],i)=R([w_1 \square w_2],i)=$

$[w_1 \square R(w_2,k)] \Rightarrow [v_1=w_1 \wedge R(v_2,j)=R(w_2,k)] \Rightarrow$(da $v_1 = w_1$) $j=k$

$\Rightarrow$(nach Induktionsannahme) $v_2=w_2 \Rightarrow v=w$

iii) Falls $\doteq(v_1) < i < \doteq(w_1)$: Man setze $j=i-\doteq(v_1)$:

$[v_1 \square R(v_2,j)]= R([v_1 \square v_2],i) = R([w_1 \square w_2],i)=[R(w_1,i) \square w_2] \Rightarrow$

$v_1 = R(w_1,i) \Rightarrow i < \doteq(v_1)$: Widerspruch zu $i > \doteq(v_1)$

iv) Falls $\doteq(w_1) < i < \doteq(v_1)$: analog zu iii) $\Rightarrow$ Eindeutigkeit.

Bemerkung: $\doteq(v_1) \neq i \neq \doteq(w_1)$:wurde beim Beweis der Existenz gezeigt.

Wir beweisen noch ein wesentliches Lemma:

)a)Lemma: Gegeben $((u,s),(u,s\sigma(\varphi)),\varphi) \varepsilon L(\gamma,\bar{\gamma}^1)$ und $((v,i),(y,i),\lambda) \varepsilon K(k_\alpha)$,mit $\tau(\varphi)=(i,i+1)$,so dass $u=R(v,i),x=R(y,i)$.Dann existiert $((x,s),(x,s\sigma(\varphi)),\varphi') \varepsilon L(\gamma,\bar{\gamma}^1)$,so dass das Bild von:

$$\begin{array}{ccc} (R(v,i),s) & & (R(y,i),s) \\ \| & \xrightarrow{\lambda} & \| \\ (u,s) & & (x,s) \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi' \\ (u,s\sigma(\varphi)) & \xrightarrow{\lambda} & (x,s\sigma(\varphi')) \\ \| & & \| \\ (R(v,i),s\sigma(\varphi)) & & (R(y,i),s\sigma(\varphi')) \end{array}$$

wobei: $R_1(((v,i),s),((y,i),s),\lambda)=((R(v,i),s),(R(y,i),s),\lambda)$, kommutiert und $\tau(\varphi)=\tau(\varphi')$

Beweis: durch Induktion nach φ.(Das ist sinnvoll,da

$(L(\gamma,\bar{\gamma}^1),(s_{1,w},s_{2,w}),(l_{1,\gamma},l_{2,\gamma},l_{1,\bar{\gamma}^1},l_{2,\bar{\gamma}^1}))$,wie in Lemma 7.8 Peano-Algebra ist)

Induktionsanfang:$\varphi \in\{\gamma,\bar{\gamma}^1\} \Rightarrow u=[-\square-] \Rightarrow (v,i)=(-,1) \Rightarrow \lambda$ kann nicht existieren.

Induktionsannahme: Sei Behauptung richtig für φ

Induktionsschluss: Man betrachte $1\square\varphi \frown \varphi\square 1$:Zunächst betrachten wir $1\square\varphi$

1) Falls $\lambda=1\square\nu,\nu\in\bar{K}(\alpha)$: Also haben wir:

$$\begin{array}{ccc} ([w\square u],s) & \xrightarrow{1\square\nu} & ([w\square x],s) \\ {\scriptstyle 1\square\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1\square\varphi'} \\ ([w\square u],s\sigma([1\square\varphi])) & \xrightarrow{1\square\nu} & ([w\square x],s\sigma([1\square\varphi'])) \end{array}$$

Es folgt nach Induktionsannahme,dass das Bild des Diagramms kommutiert.Nach Induktionsannahme folgt auch $\sigma(\varphi) =\sigma(\varphi') \Rightarrow \sigma([1\square\varphi]) = \sigma([1\square\varphi'])$

2) Falls $\lambda=\nu\square 1$,$\nu\in\bar{K}(\alpha)$,haben wir:

$$\begin{array}{ccc} ([w\square x],s) & \xrightarrow{\nu\square 1} & ([w'\square x],s) \\ {\scriptstyle 1\square\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1\square\varphi'} \\ ([w\square x],s\sigma([1\square\varphi]) & \longrightarrow & ([w'\square x],s\sigma([1\square\varphi'])) \end{array}$$

Man wähle $\varphi=\varphi' \Rightarrow \tau([1\square\varphi]) = \tau([1\square\varphi'])$. Da"$\otimes$" Bifunktor ist,folgt die Behauptung.

3)Falls $\lambda=\alpha$:Wir haben die Möglichkeiten:

i) $\varphi\in\{\gamma,\bar{\gamma}^1\}$ ii)$\varphi=1\square\psi$ iii) $\varphi=\psi\square 1$ $(\psi\in L(\gamma,\bar{\gamma}^1)$

Falls $\varphi\in\{\gamma,\bar{\gamma}^1\},\tau(\varphi)=(i,i+1)^{+1}_{-}$,$[w\square u]=[w\square[-\square-]] = R(v,i)$,d.h. $v=[w\square-]$.Also existiert kein λ.

Falls $\varphi =1\square\psi,\psi\in L(\gamma,\bar{\gamma}^1)$,haben wir:

$$\begin{array}{ccc} ([w_1 \square [w_2 \square w_3]], s) & \xrightarrow{\alpha} & ([[w_1 \square w_2] \square w_3], s) \\ \downarrow 1 \square [1 \square \psi] = 1 \square \varphi & & \downarrow 1 \square \psi = 1 \square \varphi' \\ ([w_1 \square [w_2 \square w_3]], s\sigma([1 \square [1 \square \psi]])) & \xrightarrow{\alpha} & ([[w_1 \square w_2] \square w_3], s\sigma([1 \square \psi])) \end{array}$$

Da $\models ([w_1 \square [w_2 \square w_3]]) = \models ([[w_1 \square w_2] \square w_3]) \Rightarrow$

$\tau([1 \square \varphi]) = \tau([1 \square [1 \square \psi]] = \tau([1 \square \psi]) = \tau([1 \square \varphi'])$

Das Bild des Diagrammes kommutiert, da α natürlicher Isomorphismus ist.

Falls $\varphi = \psi \square 1$, $\psi \in L(\gamma, \bar{\gamma}^1)$: analog zu $\varphi = 1 \square \psi$

Jetzt betrachten wir $\varphi \square 1$:

1) Falls $\lambda = 1 \square \nu, \nu \in \bar{K}(\alpha)$, haben wir:

$$\begin{array}{ccc} ([w \square u], s) & \xrightarrow{1 \square \nu} & ([w \square x], s) \\ \downarrow \varphi \square 1 & & \downarrow \varphi' \square 1 \\ ([w \square u], s\sigma([\varphi \square 1])) & \xrightarrow{1 \square \nu} & ([w \square x], s\sigma([\varphi' \square 1])) \end{array}$$

Man wählt $\varphi' = \varphi \Rightarrow \tau([\varphi' \square 1] = \tau([\varphi \square 1]$. Das Bild des Diagramms kommutiert, da "$\mathfrak{S}$" Bifunktor ist.

2) Falls $\lambda = \nu \square 1$, $\nu \in \bar{K}(\alpha)$:

$$\begin{array}{ccc} ([w \square x], s) & \xrightarrow{\nu \square 1} & ([w' \square x], s) \\ \downarrow \varphi \square 1 & & \downarrow \varphi' \square 1 \\ ([w \square x], s\sigma([\varphi \square 1])) & \xrightarrow{\nu \square 1} & ([w' \square x], s\sigma([\varphi' \square 1])) \end{array}$$

Das Bild des Diagramms kommutiert nach Induktionsannahme.

$\tau([\varphi' \square 1]) = \tau(\varphi') =$ (nach Induktionsannahme) $\tau(\varphi) = \tau([\varphi \square 1]$

3) Falls $\lambda = \alpha$. Wir betrachten alle Möglichkeiten:

i) $\varphi \in \{\gamma, \bar{\gamma}^1\}$. Wir betrachten $\varphi = \gamma$. Der Fall $\varphi = \bar{\gamma}^1$ ist ganz analog.

$$\begin{array}{ccc} ([[-\square-] \square [v \square w]], s) & \xrightarrow{\alpha} & ([[[-\square-] \square v] \square w], s) \\ \downarrow \gamma \square 1 & & \downarrow [\gamma \square 1] \square 1 \\ ([[-\square-] \square [v \square w]], s\sigma([\gamma \square 1])) & \xrightarrow{\alpha} & ([[[-\square-] \square v] \square w], s\sigma([[\gamma \square 1] \square 1])) \end{array}$$

Das Bild des Diagramms kommutiert, da α natürlicher Isomorphismus ist.

$\tau([\gamma\square 1] = (12) = \tau\ [[\gamma\square 1]\square 1]$

ii) $\varphi = 1\square\psi$ $\psi\varepsilon L(\gamma,\bar{\gamma}^1)$:

$$\begin{array}{ccc} ([[w_1\square w_2]\square[w_3\square w_4]],s) & \xrightarrow{\alpha} & ([[[w_1\square w_2]\square w_3]\square w_4],s) \\ [1\square\psi]\square 1\downarrow & & [[1\square\psi]\square 1]\square 1\downarrow \\ ([[w_1\square w_2]\square[w_3\square w_4]],s\sigma([[1\square\psi]\square 1])) & \xrightarrow{\alpha} & ([[[w_1\square w_2]\square w_3]\square w_4],s\sigma(*)) \end{array}$$

$* = [[1\square\psi]\square 1]\square 1$

Das Bild des Diagramms kommutiert, da α natürlicher Isomorphismus ist.

Da $([[[w_1\square w_2]\square w_3]\square w_4]) = ([[w_1\square w_2]\square[w_3\square w_4]]) \Rightarrow$

$\tau([\varphi'\square 1]) = \tau([[1\square\psi]\square 1]\square 1]) = \tau\ [[1\square\psi]\square 1]) = \tau([\varphi\square 1])$.

iii) $\varphi = \psi\square 1$, $\psi\varepsilon L(\gamma,\bar{\gamma}^1)$: analog zu ii). Also folgt die Behauptung.

Wir untersuchen jetzt die etwa "umgekehrte"Situation folgendermassen:

7.15)b) Lemma: Gegeben $((x,s),(x,s\sigma(\varphi')),\varphi')\varepsilon L(\gamma,\bar{\gamma}^1)$ und $((v,i),(y,i),\lambda)$ $\varepsilon K(\alpha)$, mit $\tau(\varphi') = (i,i+1)$, so dass $u = R(v,i)$, $x = R(y,i)$. Dann existiert $((u,s),(u,s\sigma(\varphi)),\varphi)\varepsilon L(\gamma,\bar{\gamma}^1)$, so dass das Bild von:

$$\begin{array}{ccc} (u,s) & \xrightarrow{\lambda} & (x,s) \\ \varphi\downarrow & & \varphi'\downarrow \\ (u,s\sigma(\varphi)) & \xrightarrow{\lambda} & (x,s\sigma(\varphi')) \\ \| & & \| \\ (R(v,i),s\sigma(\varphi)) & & (R(y,i),s\sigma(\varphi')) \end{array}$$

(wobei: $R_1(((v,i),s),((y,i),s),\lambda) = ((R(v,i),s),(R(y,i),s),\lambda)$) kommutiert und $\tau(\varphi) = \tau(\varphi')$.

Beweis: durch Induktion nach φ':

Induktionsanfang: $\varphi' = \gamma$ V $\varphi' = \bar{\gamma}^1 \Rightarrow x = [-\square-] \Rightarrow$ Es gibt kein λ

Induktionsannahme: Behauptung richtig für φ'

Induktionsschluss: Man betrachte $1\square\varphi'$ und $\varphi'\square 1$

i) Wir betrachten $1\square\varphi'$: genau wie bei a), bis auf wenn:

$\lambda=\alpha$ $\wedge\varphi'\varepsilon\{1\sqcap\psi,\psi\sqcap 1\}$: kleine Änderung.

$\lambda=\alpha$ $\wedge\varphi'=1\sqcap\psi$:

$$\begin{array}{ccc}
([w_1\sqcap[w_2\sqcap[w_3\sqcap w_4]]],s) & \xrightarrow{\alpha} & ([[w_1\sqcap w_2]\sqcap[w_3\sqcap w_4]],s) \\
\downarrow 1\sqcap[1\sqcap[1\sqcap\psi]] & & \downarrow 1\sqcap[1\sqcap\psi] \\
([w_1\sqcap[w_2\sqcap[w_3\sqcap w_4]]],s\sigma(*)) & \xrightarrow{\alpha} & ([[w_1\sqcap w_2]\sqcap[w_3\sqcap w_4]],s\sigma(\overset{*}{*}))
\end{array}$$

Das Bild kommutiert, da α natürlicher Isomorphismus ist.

$\tau([1\sqcap\varphi]) = \tau([1\sqcap\varphi'])$: klar.

$(*= ([1\sqcap[1\sqcap[1\sqcap\psi]]])$, $\overset{*}{*} = [1\sqcap[1\sqcap\psi]])$

Der Fall $\lambda=\alpha, \varphi'=\psi\sqcap 1$: analog.

ii) Wir betrachten $\varphi'\sqcap 1$: ganz analog zu a) bis auf den Fall $\lambda=\alpha$

1) $\varphi'=\lambda$: $x=[[-\sqcap-]\sqcap w] \Rightarrow y=[-\sqcap w] \Rightarrow$ Es gibt kein λ

2) $\varphi'=1\sqcap\psi$: Wir haben:

$$\begin{array}{ccc}
([w_1\sqcap[w_2\sqcap w_3]],s) & \xrightarrow{\alpha} & ([[w_1\sqcap w_2]\sqcap w_3],s) \\
\downarrow 1\sqcap[\psi\sqcap 1] & & \downarrow [1\sqcap\psi]\sqcap 1 \\
([w_1\sqcap[w_2\sqcap w_3]],s\sigma([1\sqcap[\psi\sqcap 1]])) & \xrightarrow{\alpha} & ([[w_1\sqcap w_2]\sqcap w_3],s\sigma([[\psi\sqcap 1]\sqcap 1]))
\end{array}$$

Das Bild des Diagramms kommutiert, da α natürlicher Isomorphismus ist. $\tau([1\sqcap[\psi\sqcap 1]) = \tau\ [[1\sqcap\psi]\sqcap 1]$: klar.

3) $\varphi'=\psi\sqcap 1$: Wir haben:

$$\begin{array}{ccc}
([w_1\sqcap[w_2\sqcap w_3]],s) & \xrightarrow{\alpha} & ([[w_1\sqcap w_2]\sqcap w_3],s) \\
\downarrow \psi\sqcap 1 & & \downarrow [\psi\sqcap 1]\sqcap 1 \\
([w_1\sqcap[w_2\sqcap w_3]],s\sigma([\psi\sqcap 1])) & \xrightarrow{\alpha} & ([[w_1\sqcap w_2]\sqcap w_3],s\sigma([[\psi\sqcap 1]\sqcap 1]))
\end{array}$$

Das Bild des Diagramms kommutiert, da α natürlicher Isomorphismus ist. Es ist hier auch klar, dass $\sigma([\psi\sqcap 1]) = \sigma([[\psi\sqcap 1]\sqcap 1])$.
Also die Behauptung des Lemmas.

Bemerkung: Direkt durch Induktion kann man zeigen, dass Lemma 7.15 auch gilt, falls statt die Kante $((v,i),(y,i),\lambda)\varepsilon K(k_\alpha)$, wobei $R_1(((v,i),s),((y,i),s),\lambda)=((R(v,i),s),(R(y,i),s),\lambda)$, ein Weg von solchen Kanten existiert.

Wir beweisen jetzt wieder einen wesentlichen Hilfssatz, der als Hilfsmittel zu unserem Ziel führt:

7.16 Hilfssatz: Sei $u \in W_1$, $\dashv\vdash(u) \geqslant 1$. Dann folgt: es gibt $\varphi \in L(\gamma, \bar{\gamma}^1)$ so dass:

$$\tau((R(u,i),s) \xrightarrow{\varphi} (R(u,i),s(i,i+1))) = (i,i+1)^{+1}_{-}$$

Beweis: durch Induktion nach $\dashv\vdash(u)$.

Induktionsanfang: $\dashv\vdash(u)=1 \Rightarrow i=1, R(u,i)=[-\square-], \varphi \in \{\gamma, \bar{\gamma}^1\} \Rightarrow$

$$\tau(([-\square-],s) \xrightarrow{\gamma \vee \bar{\gamma}^1} ([-\square-],s(12)^{+1}_{-})) = (12)^{+1}_{-}$$

Induktionsannahme: Behauptung richtig für $\dashv\vdash(u) \leqslant n$.

Induktionsschluss: $\dashv\vdash(u)=n+1 \Rightarrow u = [v \square w]$, $\dashv\vdash(v) \leqslant n \geqslant \dashv\vdash(w)$

$$R([v\square w],i) = \begin{cases} [v\square R(w,j)] & , i > \dashv\vdash(v), j=i-\dashv\vdash(v) \\ [R(v,i)\square w] & , i \leqslant \dashv\vdash(v) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ (nach Induktionsannahme) $\exists \varphi', \psi' \in \bar{L}(\gamma, \bar{\gamma}^1)$:

$$\tau(([v\square R(w,j)],s) \xrightarrow{\varphi = 1 \square \varphi'} ([v\square R(w,j)], s(\dashv\vdash(v)+j, \dashv\vdash(v)+j+1))) = (i,i+1)$$

$$\tau(([R(v,i)\square w],s) \xrightarrow{\varphi = \psi' \square 1} ([R(v,i)\square w], s(i,i+1))) = (i,i+1)$$

$\Rightarrow$ Behauptung.

7.17 Folgerung: $\dashv\vdash(u) \geqslant 2$. Gegeben $\tau_{i_1} \tau_{i_2} \ldots \tau_{i_n}$ eine beliebige Folge (Im Sinne von 7.7), dann folgt:

Es gibt einen Weg $W = ((u,1) \xrightarrow{\varphi_1} \ldots \xrightarrow{\varphi_n} (u,s))$, mit:

$$\tau(W) = \tau_{i_1}^{+1}_{-} \ldots \tau_{i_n}^{+1}_{-}$$

Beweis: durch Induktion nach n.

Induktionsanfang: n=1: Sei $\tau = (i,i+1)$. Sei $\dashv\vdash(u)=m$. Man wähle $v \in W$ so dass $\dashv\vdash(v)=m-1$. Nach 7.16 existiert $\varphi \in L(\gamma, \bar{\gamma}^1)$, so dass:

$$\tau((R(v,i),1) \xrightarrow{\varphi} (R(v,i),(i,i+1))) = (i,i+1)^{+1}_{-}.$$ Nach 1.21 $\exists$ Wege von $(R(v,i),(i,i+1))$ nach $(u,(i,i+1))$ und von $(u,1)$ nach $(R(v,i),1)$. Also folgt die Behauptung.

Induktionsannahme: Sei Behauptung richtig für n.

Induktionsschluss: auf n+1: genau wie beim Induktionsanfang.

$\Rightarrow$ Behauptung.

7.18 Folgerung: $\#_{\cdot}(u) \geq 2 \Rightarrow \exists$ Weg $W = (u,1) \longrightarrow \ldots\ldots \longrightarrow (u,1)$, mit:

$$\tau(W) = \begin{cases} \tau_i^2 \\ \tau_i \tau_j \bar{\tau}_i^{-1} \bar{\tau}_j^{-1} \ , \ i < j-1 \\ (\tau_i \tau_{i+1})^3 \end{cases}$$

Beweis: direkt aus Folgerung 7.17

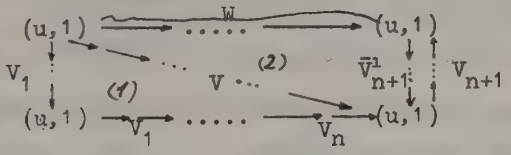
7.19 Satz: Sei W ein Weg, $W = (u,1) \longrightarrow \ldots\ldots \longrightarrow (u,1)$, mit $\tau(W) = b_1 \ldots b_n$, $b_1, \ldots, b_n \in \{d_1, d_2, d_3\}$ die Menge der erzeugenden Relationen. Dann existiert ein Weg V, so dass V aus den Teilwegen $V_1, \ldots, V_n$ besteht, wobei $(V_1) = b_1, \ldots, (V_n) = b_n$, und $W_B = V_B$ (Bild W = Bild V)

Beweis: durch Induktion nach n.

Induktionsanfang: n=1 : trivial.

Induktionsannahme: Sei Behauptung richtig für n.

Induktionsschluss: auf n+1:



Sei $W = (u,1) \longrightarrow \ldots\ldots \longrightarrow (u,1)$, $\tau(W) = b_1^{\pm 1} \ldots b_n^{\pm 1} \ b_{n+1}^{\pm 1}$. Dann existiert nach Folgerung 7.18 ein Weg : $(u,1) \longrightarrow \ldots\ldots \longrightarrow (u,1) = V_{n+1}$, wobei $\tau(V_{n+1}) = b_{n+1}^{\pm 1}$. Wir konstuieren $V = V_{n+1}^{-1}.W$: $\tau(V) = b_1^{\pm 1} \ldots b_n^{\pm 1}$. Nach Induktionsannahme $\exists V_1, \ldots, V_n : \tau(V_1) = b_1^{\pm 1}, \ldots, \tau(V_n) = b_n^{\pm 1}$, und das Bild von (1) kommutiert. Das Bild von (2) kommutiert, d.h. $V_B = V_{n+1}^{-1}{}_B \ W_B$ nach Konstruktion, und da die Bilder aus Isomorphismen bestehen, folgt auch $V_{n+1}{}_B . V_B = W_B$. Also folgt:

$W_B = V_{n+1}{}_B V_{n_B} \ldots V_1{}_B$, also die Behauptung.

um unserem Ziel zu kommen, brauchen wir eine Reihe von Hilfssätzen und Lemmas als Vorbereitung:

20 Hilfssatz: Seien $(u,u,\varphi), (u,u,\psi) \in L(\gamma, \bar{\gamma}^{-1}), \tau(\varphi) = \tau(\psi) \Rightarrow \varphi = \psi$

Beweis: durch Induktion nach $\#_D(u)$.

Induktionsanfang: $\#_D(u)=0 \Rightarrow u=- \Rightarrow$ Behauptung ist trivial.

Induktionsannahme: Behauptung richtig für $\#_D(u) \leq n$.

Induktionsschluss: $\#_D(u)=n+1, u=[v \square w] \Rightarrow [[\varphi=\varphi' \square 1 \ \vee \ \varphi = 1 \square \varphi'] \wedge$

$[\psi=\psi' \square 1 \ \vee \ \psi = 1 \square \psi']]$

Annahme: $\varphi = \varphi' \square 1 \wedge \psi = 1 \square \psi' \Rightarrow$

$\tau(\varphi) = \tau(\varphi') = (i,i+1), i+1 \leq \#_L(v)$.

$\tau(\psi) = (\#_L(v)+j, \#_L(v)+j+1)$, wobei $\tau(\psi') = (j,j+1) \Rightarrow \tau(\varphi) = \tau(\psi)$.

Analog: $\varphi = 1 \square \varphi' \wedge \psi = \psi' \square 1$

Also $\varphi = \varphi' \square 1 \Rightarrow \psi = \psi' \square 1 \wedge$

$\varphi = 1 \square \varphi' \Rightarrow \psi = 1 \square \psi'$

Wir betrachten $\varphi = \varphi' \square 1 \wedge \psi = \psi' \square 1$:

$\tau(\varphi') = \tau([\varphi' \square 1]) = \tau([\psi' \square 1]) = \tau(\psi') \Rightarrow$(nach Induktionsannahme)

$\varphi' = \psi' \Rightarrow \varphi = [\varphi' \square 1] = [\psi' \square 1] = \psi \Rightarrow$ Behauptung.

analog: $\varphi = 1 \square \varphi' \wedge \psi = 1 \square \psi' \Rightarrow$ Behauptung.

7.21 Hilfssatz: Seien $(u,u,\varphi),(u,u,\psi) \in L(\gamma,\gamma), \tau(\varphi) = \tau(\psi)^{-1} \Rightarrow \varphi = \psi^{-1}$

Beweis: durch Induktion nach $\#_D(u)$.

Induktionsanfang: $\#_D(u) = 0 \Rightarrow$ Behauptung trivial.

Induktionsannahme: Sei Behauptung richtig für $\#_D(u) \leq n$.

Induktionsschluss: $\#_D(u)=n+1 \Rightarrow u=[v \square w], \#_D(v) \leq n \geq \#_D(w). \Rightarrow$

$[[\varphi=\varphi' \square 1 \ \vee \ \varphi = 1 \square \varphi'] \wedge [\psi = \psi' \square 1 \ \vee \ \psi = 1 \square \psi']]$

Annahme: $\varphi = \varphi' \square 1 \wedge \psi = 1 \square \psi' \Rightarrow$

$(i,i+1) = \tau(\varphi') = \tau(\varphi) = \tau(\psi)^{-1} = (\#_L(v)+j, \#_L(v)+j+1)^{-1}, i+1 \leq \#_L(v)$

$< \#_L(v)+j$

Wir rechnen jetzt in S_n, schreiben $\overline{(i,j)} \in S_n \Leftrightarrow (i,j) \in F$. Also:

$\overline{(i,i+1)} = \overline{(\#_L(v)+j, \#_L(v)+j+1)^{-1}} = \overline{(\#_L(v)+j, \#_L(v)+j+1)}$, $i+1 \leq \#_L(v)$

$< \#_L(v)+j$

Widerspruch. Also $\varphi=\varphi' \square 1 \Rightarrow \psi=\psi' \square 1$.

Analog: $\varphi=1 \square \varphi' \Rightarrow \psi=1 \square \psi'$.

Jetzt betrachten wir $\varphi=\varphi'\square 1 \wedge \psi=\psi'\square 1$:

$\tau(\varphi')=\tau(\varphi) = \tau(\psi)^{-1}= \tau(\psi')^{-1} \Rightarrow$ (Induktionsannahme) $\varphi' = \psi'^{-1}$

$\Rightarrow \varphi = \varphi'\square 1 = \psi'^{-1}\square 1 = \psi^{-1} \Rightarrow$ Behauptung.

Analog: $\varphi = 1\square\varphi' \wedge \psi = 1\square\psi' \Rightarrow$ Behauptung.

.22 Hilfssatz: Sei $W = (u,1)\xrightarrow{\varphi}(u,\sigma(\varphi))\xrightarrow{\varphi}(u,\sigma^2(\varphi)=1)$ ein Weg

$\Rightarrow W_B = 1$.

Beweis: durch Induktion nach φ

Induktionsanfang: $\varphi = \gamma \Rightarrow \varphi^2 = \gamma^2 = 1$ (nach (O)), die Behauptung.

Induktionsannahme: Behauptung richtig für φ.

Induktionsschluss: $\varphi^2\otimes 1 = 1\otimes 1 = 1 = 1\otimes 1 = 1\otimes\varphi^2 \Rightarrow$ Behauptung.

Wir zittieren jetzt einen wesentlichen Satz, der in [10] bewiesen ist:

7.23 Satz: Jedes Element einer freien Gruppe F_n, die von freien Generatoren $x_1,\ldots,x_n$ erzeugt ist, definiert in einer eindeutigen Weise ein reduzierten Wort, das heisst: Jedes Wort in $x_1,\ldots,x_n$ ist gleich zu einem eindeutigen reduzierten Wort.

(Ein reduziertes Wort in $x_1,\ldots,x_n$ ist ein Wort, in dem die Symbolen $x_\nu^{\varepsilon}, x_\nu^{-\varepsilon}$, $(\varepsilon = \pm 1 , \nu=1,\ldots,n)$ tauchen nicht auf.)

Wir kommen allmählich zu unserem Hauptsatz, beweisen zunächst folgende Lemma und Sätze:

7.24 Satz: Sei $W= (u,1)\longrightarrow \ldots\longrightarrow(v,s)\xrightarrow{\varphi_i^{\wedge}\varepsilon\bar{L}(\gamma,\bar{\gamma}^1)} (v,s\sigma(\varphi_i^{\wedge}))\longrightarrow\ldots$

$\xrightarrow{\psi_j^{\wedge}\varepsilon\bar{K}(\alpha,\bar{\alpha}^1)}(w,s\sigma(\varphi_i^{\wedge}))\xrightarrow{\varphi_{i+1}^{\wedge}\varepsilon\bar{L}(\gamma,\bar{\gamma}^1)} (w,s\sigma(\varphi_i^{\wedge})\sigma(\varphi_{i+1}^{\wedge}))\xrightarrow{\psi_{j+1}^{\wedge}\varepsilon\bar{K}(\alpha,\bar{\alpha}^1)}$

$\ldots\longrightarrow(u,1)$, so dass $\tau(W) = d_1 = \tau_i^2 \Rightarrow W_B = 1$.

Beweis: Sei W aus n Kanten $\varepsilon L(\gamma,\bar{\gamma}^1)$ und m Kanten aus $K(\alpha,\bar{\alpha}^1)$ bestehend.

1) Fall: $\exists_i^{\wedge}:\tau(\varphi_i^{\wedge}) = \tau(\varphi_{i+1}^{\wedge})^{-1}, \varphi_i^{\wedge}, \varphi_{i+1}^{\wedge}\varepsilon L(\gamma,\bar{\gamma}^1)$, $\hat{i}\varepsilon\{1,\ldots,n-1\}$. Man betrachte:

$$W = (u,1) \longrightarrow \ldots \longrightarrow (v,s) \xrightarrow{\varphi_i^{\wedge}} (v, s\sigma(\varphi_i^{\wedge})) \longrightarrow \ldots \longrightarrow (w, s\sigma(\varphi_i^{\wedge}))$$

$$\xrightarrow{\varphi_{i+1}^{\wedge}} (w,s) \longrightarrow \ldots \longrightarrow (u,1), \tau(\varphi_i^{\wedge}) = (j, j+1)^{\pm 1}$$

Nach 7.14 $\exists_1 (p,j) \varepsilon W_N$: $R(p,j)=v$,

$\exists_1 (q,j) \varepsilon W_N$: $R(q,j)=w$

$\#(v)=\#(w) \Rightarrow \#(p)=\#(q) \Rightarrow$ (nach 1.21) $\exists$ ein Weg mit Kanten aus $K(\alpha,\bar{\alpha}^1)$ von p nach q.

Jetzt wende man R_1 auf die Kanten des Weges an, man erhält das nächste Diagramm, dessen Bild nach 7.15 kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} (v,s) & R_1(W_1) & (w,s) \\ \| & & \| \\ (R(p,j),s) & \longrightarrow \ldots \longrightarrow & (R(q,j),s) \\ \varphi_i^{\wedge} \downarrow & & \varphi_i^{\wedge} \downarrow \\ (R(p,j), s\sigma(\varphi_i^{\wedge})) & \xrightarrow[R_1(W_1)]{} \ldots \longrightarrow & (R(q,j), s\sigma(\varphi_i^{\wedge})) \\ \| & & \| \\ (v, s\sigma(\varphi_i^{\wedge})) & & (w, s\sigma(\varphi_i^{\wedge})) \end{array}$$

($R_1(W_1)$ representiert die Kanten des Weges nach der Anwendung von R_1.)

und $\tau(\varphi_i^{\wedge}) = \tau(\varphi_i^{\wedge})$.

Also erhält man:

$$(u,1) \longrightarrow \ldots \longrightarrow (v,s) \xrightarrow{R_1(W_1)} (w,s) \xrightarrow{\varphi_i^{\wedge}} (w, s\sigma(\varphi_i^{\wedge})) \xrightarrow{\varphi_{i+1}^{\wedge}} (w,s)$$

$$\cdots \longrightarrow (u,1)$$

d.h. wir können $\varphi_i^{\wedge}$ und $\varphi_{i+1}^{\wedge}$ eliminieren. (nach 7.21)

2) Fall: $\forall i, i \varepsilon \{1,\ldots,n-1\}$ $\tau(\varphi_i^{\wedge}) \neq \tau(\varphi_{i+1}^{\wedge})^{-1} \Rightarrow$ (nach Satz 7.23)

$n = 2 \wedge \tau(\varphi_i^{\wedge}) = \tau(\varphi_{i+1}^{\wedge}) = \tau_j$.

Wir können jetzt wieder dieselbe Technik wie im Fall 1) ausnutzen, so dass nach $\varphi_i^{\wedge}$ folgt φ_{i+1} unmittelbar. Jetzt nach 7.22 und 1.21 folgt die Behauptung direkt.

Wir beweisen jetzt den folgenden Hilfssatz:

7.25 Hilfssatz: $i,j\in N \wedge i < j-1 \Rightarrow R(R(w,j-1),i) = R(R(w,i),j)$.

Beweis: durch Induktion nach $\#_{\sqcap}(w)$.

Induktionsanfang: $\#_{\sqcap}(w) = 0 \Rightarrow$ Behauptung ist trivial.

Induktionsannahme: Sei Behauptung richtig für $\#_{\sqcap}(w) \leq n$.

Induktionsschluss: $\#_{\sqcap}(w) = n+1 \Rightarrow w = [u\sqcap v], \#_{\sqcap}(u) \leq n \geq \#_{\sqcap}(v)$.

1) Fall: $j-1 \leq \#_{\perp}(u)$:

$R(R([u\sqcap v],j-1),i) =$ (da $j-1 \leq \#_{\perp}(u)$) $R([R(u,j-1)\sqcap v],i) =$ (da $i < j-1 \leq \#_{\perp}(u)$) $[R(R(u,j-1),i)\sqcap v] =$ (nach Induktionsannahme) $[R(R(u,i),j)\sqcap v] = R([R(u,i)\sqcap v],j) = R(R([u\sqcap v],i),j)$

2) Fall: $j-1 > \#_{\perp}(u)$:

i) Falls $i \leq \#_{\perp}(u)$:

$R(R([u\sqcap v],j-1),i) =$ (da $j-1 > \#_{\perp}(u)$) $R([u\sqcap R(v,j-1-\#_{\perp}(u))],i)$ $=$ (da $i \leq \#_{\perp}(u)$) $[R(u,i)\sqcap R(v,j-1-\#_{\perp}(u))] = R([R(u,i)\sqcap v],j) = R(R([u\sqcap v],i),j)$.

ii) Falls $i > \#_{\perp}(u)$:

$R(R([u\sqcap v],j-1),i) =$ (da $j-1 > \#_{\perp}(u)$) $R([u\sqcap R(v,j-1-\#_{\perp}(u))],i)$ $=$ (da $i > \#_{\perp}(u)$) $[u\sqcap R(R(v,j-1-\#_{\perp}(u)),i-\#_{\perp}(u))] =$ (nach Induktionsannahme) $[u\sqcap(R(R(v,i-\#_{\perp}(u)),j-\#_{\perp}(u)))] = R([u\sqcap R(v,i-\#_{\perp}(u))],j)$ $= R(R([u\sqcap v],i),j)$. Also folgt die Behauptung.

Jetzt mit Hilfe von 7.25 zeigen wir:

7.26 Satz: Sei $W = (u,1) \longrightarrow \ldots\ldots \longrightarrow (u,1)$ ein Weg, so dass $\tau(W) = d_2 = \tau_i\,\tau_j\,\tau_1^{-1}\,\tau_j^{-1}$, $i < j-1 \Rightarrow W_B = 1$.

Beweis: Sei W aus n Kanten $\varepsilon L(\gamma,\bar{\gamma}^1)$ und m Kanten $\varepsilon K(\alpha,\bar{\alpha}^1)$:

1) Fall: $\exists l\varepsilon\{1,\ldots,n-1\}: \tau(\varphi_l) = \tau(\varphi_{l+1})^{-1}, \varphi_l, \varphi_{l+1} \varepsilon L(\gamma,\bar{\gamma}^1)$:

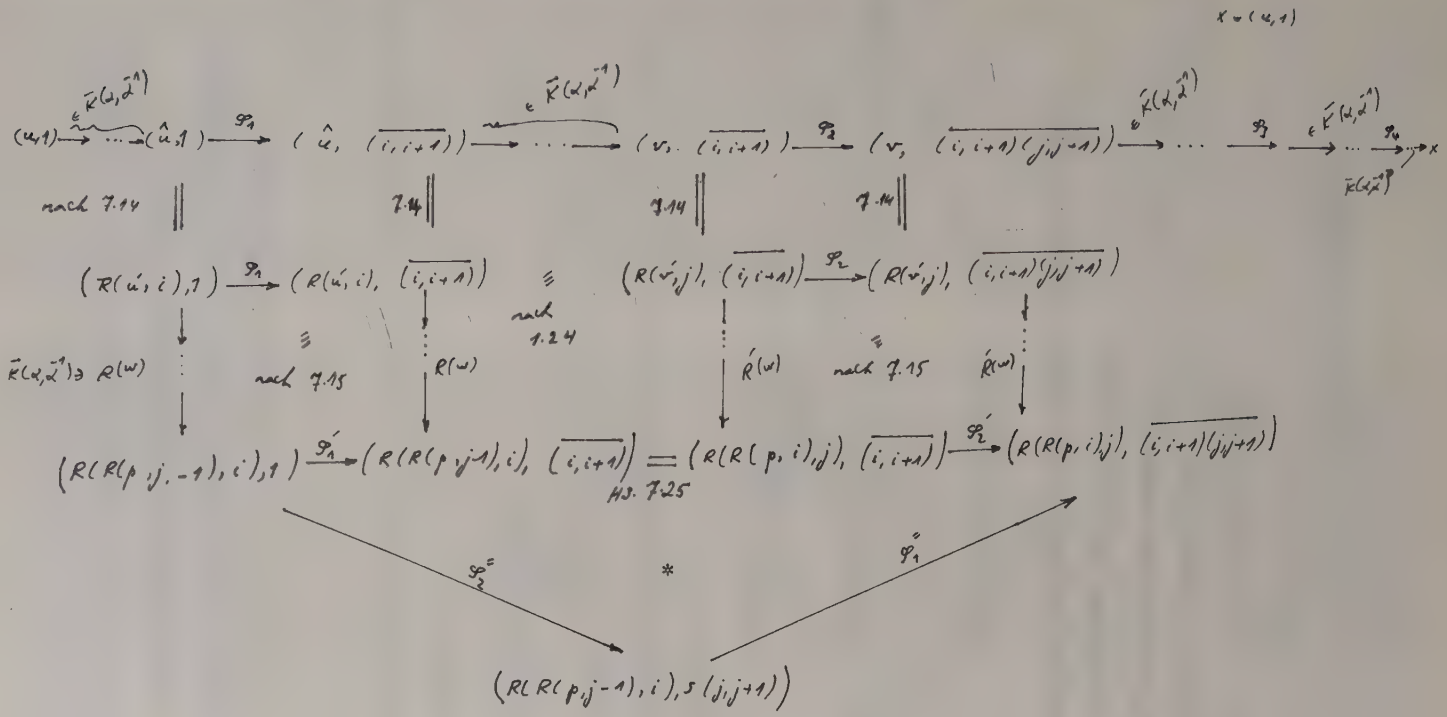
Analog zum Satz 7.24, d.h. wir eliminieren φ_l, φ_{l+1}.

2) Fall: $\forall l\varepsilon\{1,\ldots,n-1\}: \tau(\varphi_l) \neq \tau(\varphi_{l+1})^{-1}, \varphi_l, \varphi_{l+1} \varepsilon L(\gamma,\bar{\gamma}^1)$:

$\Rightarrow$ (nach Satz 7.23) $n = 4 \wedge \tau(\varphi_1) = (i,i+1)$, $\tau(\varphi_2) = (j,j+1)$,

$\tau(\varphi_3) = (i,i+1)^{-1}, \tau(\varphi_4) = (j,j+1)^{-1}$

Wir konstruieren das folgende Diagramm:


x = (u,1)
nach 7.14
7.14
7.14
7.14
nach 7.15
nach 1.24
nach 7.15
HJ. 7.25
*

R(w) und R'(w) existieren nach 1.21.

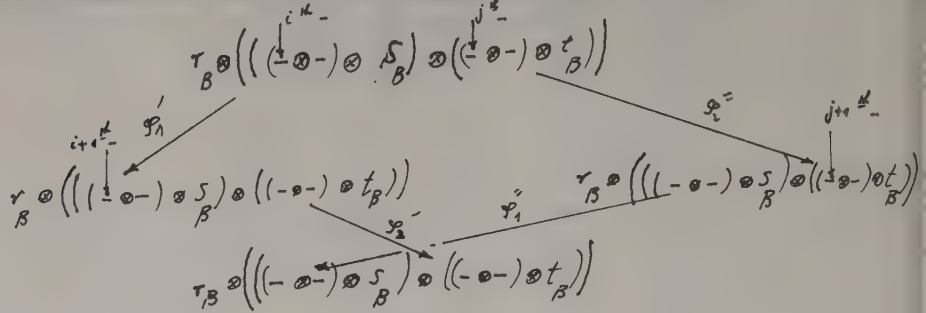
Wir wählen p=[r□[[-□s]□[-□t]]], wobei $\overline{\overline{|}}_-(p) = \overline{\overline{|}}_-(u)-2$,

$\overline{\overline{|}}_-(r) = i-1$, $\overline{\overline{|}}_-(s) = j-2-i$.

$\tau(\varphi_1) = \tau(\varphi_1') \sim \tau(\varphi_2) = \tau(\varphi_2')$ (nach 7.15)

φ_1'' und φ_2'' sind so gewält, dass $\tau(\varphi_1'') = (i,i+1) \sim \tau(\varphi_2'') = (j,j+1)$, das ist möglich nach der Konstruktion von p. (Diese sind die einzigen mit solchen Bedingungen nach 7.20)

Jetzt kommutiert das Bild des Diagramms (*), da wir haben:



und ⊗ Bifunktor ist.

Wir sind jetzt in der Situation vom Satz 7.24 (Fall (1)), aber in "zwei Stufen": $\tau(\varphi_1'') = (i,i+1)$, $\tau(\varphi_3) = (i,i+1)^{-1}$ und

$\tau(\varphi_2'') = (j,j+1)$, $\tau(\varphi_4) = (j,j+1)^{-1}$.

Also folgt die Behauptung.

Jetzt beweisen wir :

7.27 Satz: Sei $W = (u,1) \longrightarrow \ldots\ldots \longrightarrow (u,1)$, $\tau(W) = d_3 = (\tau_i\ \tau_{i+1})^3$

$\Rightarrow W_B = 1$.

Beweis:

Sei W aus n Kanten $\varepsilon L(\gamma, \bar{\gamma}^1)$ und m Kanten aus $K(\alpha, \bar{\alpha}^1)$.

1) Fall: $\exists l \varepsilon \{1,\ldots,n-1\} : \tau(\varphi_l) = \tau(\varphi_{l+1})^{-1}$, $\varphi_l, \varphi_{l+1} \varepsilon L(\gamma, \bar{\gamma}^1)$:

Analog zum Satz 7.24, d.h. wir eliminieren φ_l, φ_{l+1}.

2) Fall: $\forall l \varepsilon \{1,\ldots,n-1\} : \tau(\varphi_l) \neq \tau(\varphi_{l+1})^{-1}$, $\varphi_l, \varphi_{l+1} \varepsilon L(\gamma, \bar{\gamma}^1)$:

$\Rightarrow$ (nach 7.23) $n = 6 \sim \tau(\varphi_1) = \tau(\varphi_3) = \tau(\varphi_5) = (i,i+1) \sim$

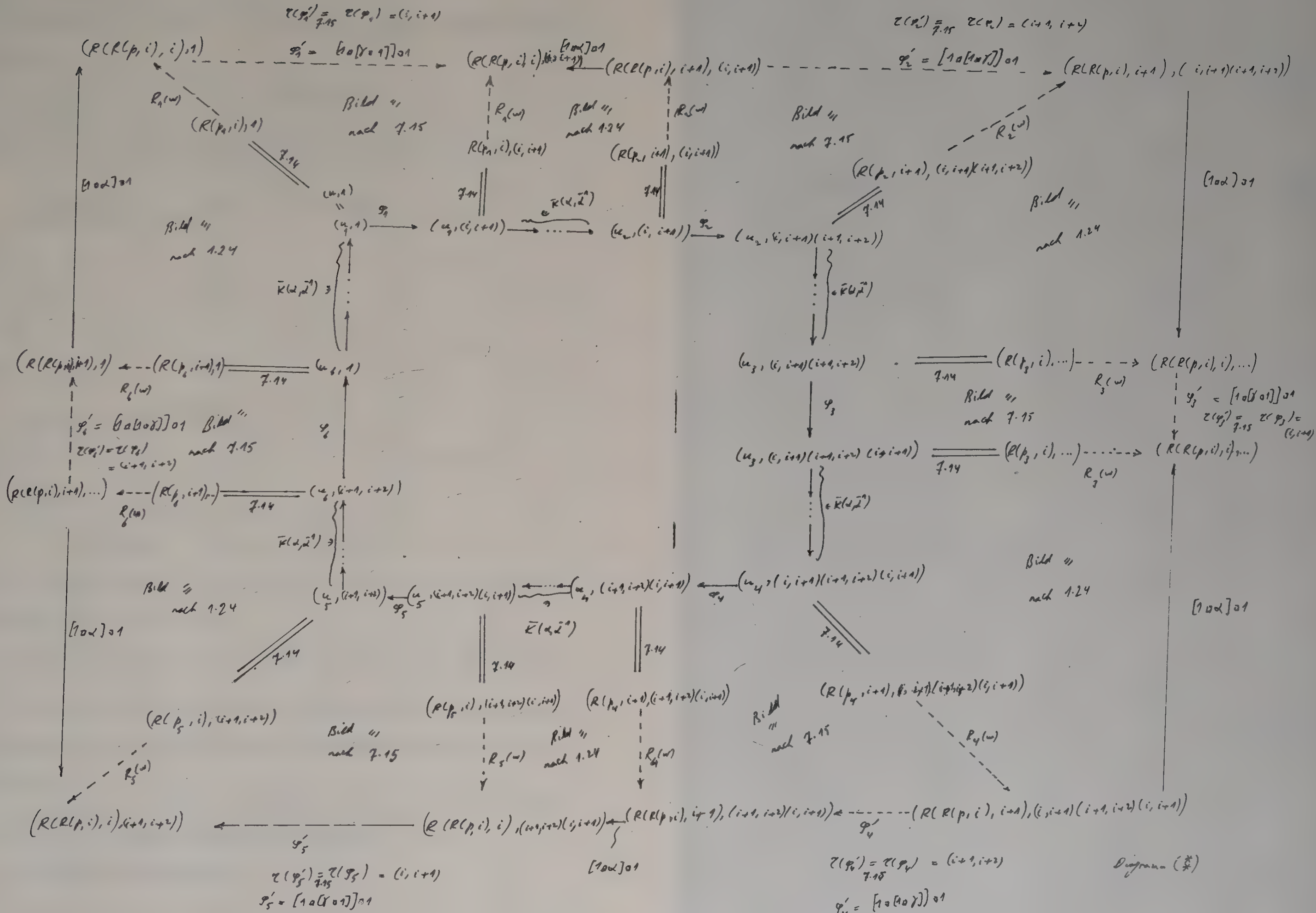


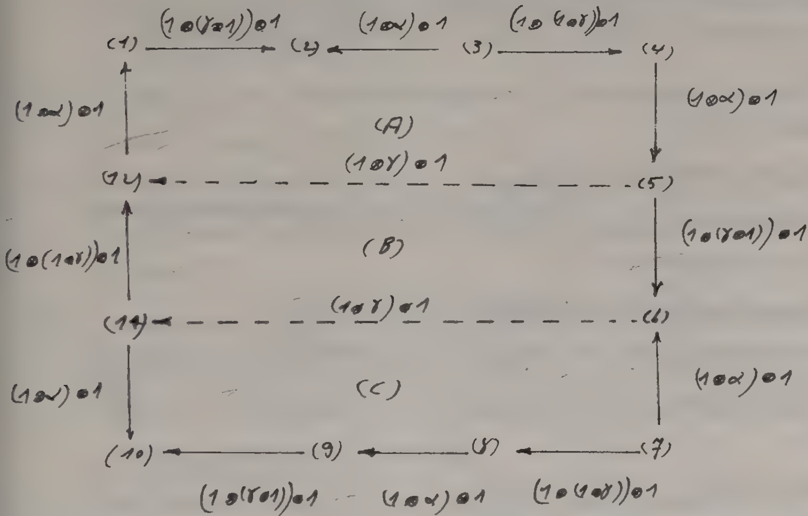
Diagramm (*)

$\tau(\varphi_2) = \tau(\varphi_4) = \tau(\varphi_6) = (j,j+1)$.

Wir konstuieren Diagramm (※), wobei $p = [[x\square-]\square y]$, $\#_-(p) = \#_-(u)-2$, $\#_-(x) = i-1$.

$R_1(w), R_2(w), \ldots \in K(\alpha, \alpha^{-1})$ existieren nach 1.21.

Das Bild des Diagramms kommutiert wegen des Hauptsatzs in §1, des Satzes 7.15 und da das folgende Diagramm kommutiert:



Die Punkten (1),(2),... sind die Bilder der Punkten $(R(R(p,i),i),1)$, $(R(R(p,i),i),(i,i+1))$,...

Das Diagramm (A) kommutiert nach Bedingungen (0) und (2) bei Definition einer symmetrischen monoidalen Kategorie.

Das Diagramm (B) kommutiert da γ natürlicher Isomorphismus ist und wegen (0) bei Definition einer symmetrischen monoidalen Kategorie.

Das Diagramm (C) kommutiert nach Bedingung (2) bei Definition einer symmetrischen monoidalen Kategorie.

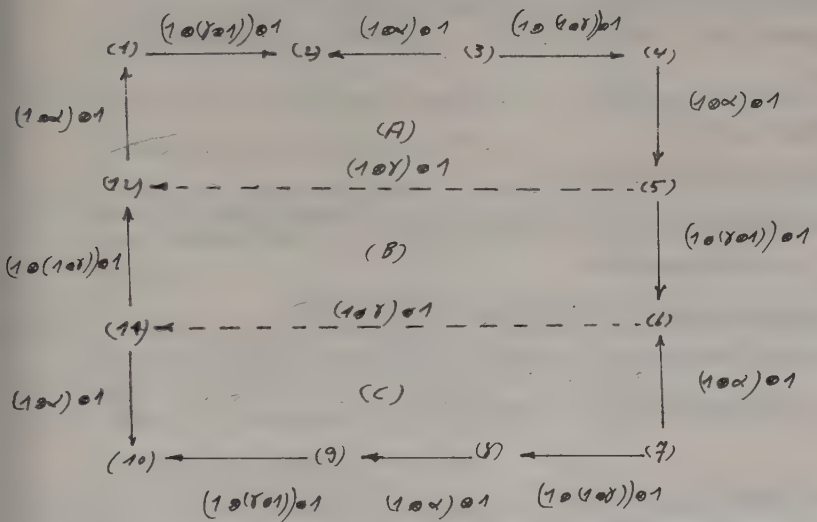
Also folgt die Behauptung.

$\tau(\varphi_2) = \tau(\varphi_4) = \tau(\varphi_6) = (j, j+1)$.

Wir konstuieren Diagramm (*), wobei $p = [[x\square -]\square y]$, $\#(p) = \#(u)-2$, $\#(x) = i-1$.

$R_1(w), R_2(w), \ldots \in K(\alpha, \bar{\alpha}^{-1})$ existieren nach 1.21.

Das Bild des Diagramms kommutiert wegen des Hauptsatzs in §1, des Satzes 7.15 und da das folgende Diagramm kommutiert:



Die Punkten (1),(2),... sind die Bilder der Punkten (R(R(p,i),i),1), (R(R(p,i),i),(i,i+1)),...

Das Diagramm (A) kommutiert nach Bedingungen (0) und (2) bei Definition einer symmetrischen monoidalen Kategorie.

Das Diagramm (B) kommutiert da γ natürlicher Isomorphismus ist und wegen (0) bei Definition einer symmetrischen monoidalen Kategorie.

Das Diagramm (C) kommutiert nach Bedingung (2) bei Definition einer symmetrischen monoidalen Kategorie.

Also folgt die Behauptung.

Jetzt können wir endlich unseren Hauptsatz beweisen:

Hauptsatz:

Sei $W = (u,1) \longrightarrow \ldots\ldots \longrightarrow (u,1)$ ein Weg. Es folgt $W_B = 1$.

Beweis: $\sigma(W) = 1 \Rightarrow \tau(W) = b_1 \ldots b_n$, wobei $b_1, \ldots, b_n \varepsilon \{d_1, d_2, d_3\}$ die Menge der erzeugenden Relationen. Es folgt nach Satz 0.19, dass ein Weg V existiert, so dass V aus Teilwegen $V_1, \ldots, V_n$ besteht, wobei $\tau(V_1) = b_1, \ldots, \tau(V_n) = b_n$ und $W_B = V_B$. (Bild W = Bild V).

Behauptung: $V_B = 1$.

Beweis: durch Induktion nach n:

Induktionsanfang: n = 1 : Behauptung folgt unmittelbar aus den Sätzen 7.24, 7.26 und 7.28.

Induktionsannahme: Sei Behauptung richtig für n.

Induktionsschluss: auf n+1: Sei $V' = V \circ V''$, wobei $\tau(V) = b_1 \ldots b_n$, $b_1, \ldots, b_n \varepsilon \{d_1, d_2, d_3\}$, $\tau(V'') = b_{n+1}$, $b_{n+1} \varepsilon \{d_1, d_2, d_3\} \Rightarrow V'_B = V_B \circ V''_B = 1 \circ 1 = 1$

Man bemerkt, dass $V = (u,1) \longrightarrow \ldots\ldots \longrightarrow (u,1)$ und $V'' = (u,1) \longrightarrow \ldots\ldots \longrightarrow (u,1)$, sonst wäre $V = (u,1) \longrightarrow \ldots\ldots \longrightarrow (u,s)$, $s = 1 \Rightarrow \sigma(V) = 1 \Rightarrow \tau(V) \varepsilon R$, d.h. $\tau(V)$ hat keine Darstellung $\tau(V) = b_1 \ldots b_n$, $b_1, \ldots, b_n \varepsilon \{d_1, \ldots, d_n\}$. Also wählt man V und V'' in dieser Form, das ist möglich nach 1.24.

Literaturverzeichnis:

[1] Burnside,W.,Theory of Groups of Finite Order,Cambridge at the University Press,1911,Note C.

[2] Epstein,D.B.A.,Functors between tensored categories, Invent. Math. 1(1960),S.221-228.

[3] Kelly,G.M.,On Mac Lane's coditions for coherence of natural associativities,commutativities,etc.,J.Algebra 1(1964),S.397-402.

[4] Kelly,G.M.,An abstract approach to coherence,Lecture Notes in Math. 281,S.106-147.

[5] Kelly,G.M. and Mac Lane,S.,Closed Coherence for a Natural Transformation,Lecture Notes in Math.281(1972), S.1-28.

[6] Kelly,G.M. and Mac Lane,S.,Coherence in Closed Categories, J.Pure and Applied Algebra 1(1971),S. 97-140.

[7] Lewis,G.,Coherence for a Closed Functor,Lecture Notes in Math.281(1972),S.148-195.

[8] Mac Lane,S.,Natural Associativity And Commutativity, Rice University Studies 49(1963),S.28-46.

[9] Mac Lane,S.,Categories for the Working Mathematician, Springer 1971.

[10] Magnus,W.,Karras,A. and Solitar,D.,Combinatorial Group Theory,Interscience Publishers 1966.

[11] Pareigis,B.,Non-additive ring and module theory I. General theory of Monoids,Publicationes Mathematicae Tomus 24,Debrecen 1977,S.189-204.

[12] Pareigis,B.,Non-additive ring and module theory II. $\mathfrak{C}$-Categories,$\mathfrak{C}$-Functors and $\mathfrak{C}$-Morphisms,ibid.S.351-361.

[13] Pareigis,B.,Categories and Functors,Academic Press,1970.

[14] Voreadou,R.,Coherence and non-commutative diagrams in

closed categories,Ph.D.Thesis,The University of Chicago, 1972

[15] Voreadou,R.,A Coherence Theorem For Biclosed Categories, Manuskript.

[16] Voreadou,R.,Some remarks on the subject of coherence, Cahiers Topo.et Geom.diff.XV(1974),S.399-417.

[17] Stoll,R.R.,Set Theory and Logic,Freeman Company, San Fransisco and London,1961.

Lebenslauf

Geburtsdatum: 6-8-1944

Geburtsort: Kairo

Schulbildung:
1) Saad Zaglul's Elementary School-Tanta (Okt.1951-Sept.1953)
2) Kena Preparatory School-Kena (Okt.1953-Sept.1955)
3) Heliopolis Preparatory School-Heliopolis-Cairo (Okt.1955-Sept.1957)
4) Heliopolis Secondary School-Heliopolis-Cairo (Okt.1957-März 1958)
5) Damanhour Secondary School-Damanhour (März 1958-August 1960)

Studium:
1) Faculty of Engineering-Assiut University-Assiut (Sept.1960-Sept.1961)
2) Faculty of Engineering-The University of Ain Shams-Abbasia-Cairo (Okt.1961-Dez.1966)
3) Faulty of Science-The University of Ain Shams-Abbasia-Cairo (Okt.1967-April 1972)
4) Mathematisches Institut der Universität München (April 1974-)

Abschlussprüfungen:
1) B.Sc.Electrical Communications,Nov.1966
2) B.Sc.Mathematics and Statistics,Mai 1969
3) M.Sc.Mathematics(Courses),Okt.1970

Berufliche Tätigkeiten:
1) Ingenieur(Nasr Company for T.V.Cairo, April 1967-Sept.1969)
2) Demonstrator(Faculty of Science-The Uni.of Ain Shams,Okt.1969-Nov.1972)
3) Assistant Lecturer(The Uni.of Ain Shams,Nov.1972-)